

UMA EQUAÇÃO QUE DETERMINA A DISTÂNCIA MÉDIA DOS PLANETAS EM RELAÇÃO AO SOL

ADALBERTO RAMON VALDERRAMA GERBASI

Ex-professor Colaborador do Departamento de
Estatística da UEM - Docente/FIAPEC

RESUMO

Neste artigo apresentaremos uma solução para determinar a distância média dos planetas em relação ao Sol através de uma função F com uma única variável, atingindo uma precisão de 99,99%.

ABSTRACT

In this article we present a solution to determine the average distance of the planets to the Sun through an F function with only one variable, reaching an accuracy of 99,99%.

1. INTRODUÇÃO

Por muitos séculos, o homem colocou a Terra como o centro de toda a criação, tendo como base a teoria geocêntrica do astrônomo grego Ptolomeu, sustentada pela Igreja. A teoria colocava a Terra imóvel no centro do universo. A Lua, os planetas, o Sol e as estrelas movimentavam-se em torno da Terra, presos a esferas perfeitas e transparentes. Em meados do século XVI, surgiu uma nova teoria

que explicava a posição e o movimento orbital dos planetas; era uma publicação do clérigo católico polonês Nicolau Copérnico, defendendo que o Sol, e não a Terra, era o centro do universo. Sendo admitida a Terra como um dos planetas, o terceiro em relação ao Sol, movendo-se em órbita circular perfeita, nascia a teoria heliocêntrica.

A confrontação do dualismo geocentrismo-heliocentrismo atinge seu apogeu nos séculos XVI e XVII, na pessoa do astrônomo alemão Johannes Kepler, brilhante matemático e pensador. Kepler associa os cinco sólidos regulares ou poliedros de Pitágoras aos seis planetas conhecidos na época, entendendo que estes sólidos, inscritos um dentro do outro, especificariam as distâncias dos planetas ao Sol. Porém, os cálculos realizados não coincidiam nem com as posições nem com as órbitas por eles descritas.

Anos mais tarde, une-se ao dinamarquês Tycho Brahe, o maior observador e compilador celeste da época.

Com os registros do dinamarquês, refaz os seus cálculos e descobre que os planetas giram em órbitas elípticas, tendo o Sol como um de seus focos (1ª Lei de Kepler) e os planetas percorrendo áreas iguais em tempos iguais (2ª Lei). Anos depois, enuncia a sua terceira Lei que diz: o quadrado dos períodos (tempo para realizar uma órbita completa) dos planetas é proporcional ao cubo das suas distâncias.¹

Cabe ao matemático, físico e astrônomo italiano Galileu Galilei mostrar o caminho para o universo, sendo o primeiro a ver os céus através

de um telescópio.

Suas observações sobre as estrelas e planetas demonstram a teoria de Copérnico, de que o Sol é o centro do Sistema Solar. Descobriu as crateras e montanhas da Lua, as fases de Vênus e as quatro luas de Júpiter².

Os trabalhos do físico e matemático inglês Isaac Newton dão a sustentação definitiva para a mecânica celeste. Utilizando a terceira Lei de Kepler, formula matematicamente a Lei da Gravitação Universal¹.

Desde épocas muito remotas, os cinco planetas visíveis a olho nu: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno, sendo a Terra o sexto, eram conhecidos pelo Homem.

Com o avanço da Astronomia e do instrumental ótico, os astrônomos procuravam descobrir uma lei ou regra geral que satisfizesse a ordenação da distância dos planetas em relação ao Sol.

Em 1741, surgem os primeiros estudos; o astrônomo alemão Christian Wolf estabelece empiricamente a seqüência:

0 - 3 - 6 - 12 - 24 - 48 - 96 - 192 - 384 - 768.

Se seguidamente adicionarmos 4 a cada termo e dividirmos o resultado por 10, obteremos:

0,4 - 0,7 - 1,0 - 1,6 - 2,8 - 5,2 - 10,0 - 19,6 - 38,8 - 77,2.

Seqüência esta que apresenta resultados com boa aproximação para se obter as distâncias dos planetas em relação ao Sol, em unidades astronômicas^{1*}. O Termo geral da série é dado por:

$$D_n = 0,4 + (0,3)^n \text{ U.A.}, \quad n = 1,2,\dots,10. \quad [4]$$

Em 1766, o astrônomo alemão Johannes Tietz, conhecido como Titius, confirma a série como sendo uma progressão geométrica de razão 1,6 a 1,7. Esta regra é conhecida como Lei de Bode, devido a seu maior difusor, o também astrônomo alemão Johann Elert Bode. Para Vênus, Terra e Júpiter, a Lei de Bode é muito precisa; no caso de Mercúrio, Marte e Saturno, a lei se aproxima.

A descoberta de Urano pelo astrônomo inglês William Herschel, em 1781, a uma distância de 19,6 U.A., desperta a curiosidade dos entendidos,

1* - U.A = 150.000.000 Km

estabelecendo-se como uma lei séria.

No caso de Netuno, descoberto em 1846 pelo astrônomo alemão Johann Galle a uma distância de 30 U.A., a seqüência de Bode mostrava que o planeta deveria ficar a 38,8 U.A., abalando a sua confiabilidade.

Em 1930, o astrônomo americano Clyde W. Tombaugh anuncia a descoberta de Plutão a uma distância média do Sol de 40 U.A., valor que não correspondia ao da série de Wolf, que é de 77,2 U.A., jogando por terra definitivamente a Lei de Bode.

Para o valor de 2,8 U.A., não existia planeta conhecido. Quando os astrônomos intentaram localizar o planeta, encontraram apenas um amontoado de asteróides ou planetóides, que formam o chamado cinturão de asteróides entre Marte e Júpiter.

Em 1983, o estatístico francês M. Damiani, Secretário-geral da Sociedade Estatística da França, estabelece a fórmula matemática:

$$X(n) = e^{r \cdot n} \{a \cdot \text{Sen}[A(n - 0,5)] + b \cdot \text{Sen}[B(n - 0,5)]\},$$

com

$n = 1,2,3,\dots,12$; $e = 2,71828\dots$; e os parâmetros:

$r = 0,422$; $a = 0,36$; $A = 9^\circ$; $b = 0,08$ e $B = 49,5^\circ$, determinados empiricamente. A função acima é capaz de fornecer com bastante precisão a distância de todos os planetas conhecidos em relação ao Sol, com um erro máximo de 7% inclusive a localização possível de um planetóide entre Mercúrio^{2**} e o Sol, como também a do planeta X, o décimo, que os astrônomos presumem existir devido às anomalias observadas na órbita de Urano e Netuno³.

Pelo exposto anteriormente, não existe hoje uma lei física bem definida e expressável matematicamente para determinar a distância média dos planetas em relação ao Sol. Esta pesquisa tem por objetivo contribuir para a obtenção de uma função F constituída por uma única variável, que nos permita calcular essas distâncias com uma precisão superior às leis aqui apresentadas.

2** - As perturbações na órbita de Mercúrio são explicadas pela Teoria Geral da Relatividade de Albert Einstein.

2 - METODOLOGIA

Os modelos matemáticos utilizados para determinar a solução do problema são: correlação, análise de regressão, método dos mínimos quadrados.

Tanto para os métodos matemáticos, como para os cálculos envolvidos nestes processos, usaremos técnicas computacionais, com 10 casas decimais de aproximação, exceto para os coeficientes estatísticos. Por outro lado, será escolhida para a 5ª posição a faixa de asteróides que se localizam a uma distância média de 2,8 U.A., ou 418,9 milhões de km do Sol, e não o planeta Júpiter, pelos seguintes motivos:

- a Astronomia não desvendou o que teria ocorrido naquela região do espaço: se era um planeta que existia nessa posição e que fora destruído pela colisão com outro corpo celeste, ou se, nos primórdios do nascimento do sistema solar, a matéria não chegou a consolidar-se devido ao forte campo gravitacional de Júpiter, formando assim um Planeta⁴.
- por outro lado, os cálculos efetuados incluindo a distância média de 418,9 milhões de km entre eles e o Sol são estatisticamente mais significativos para a construção da função F.

3 - O PROBLEMA

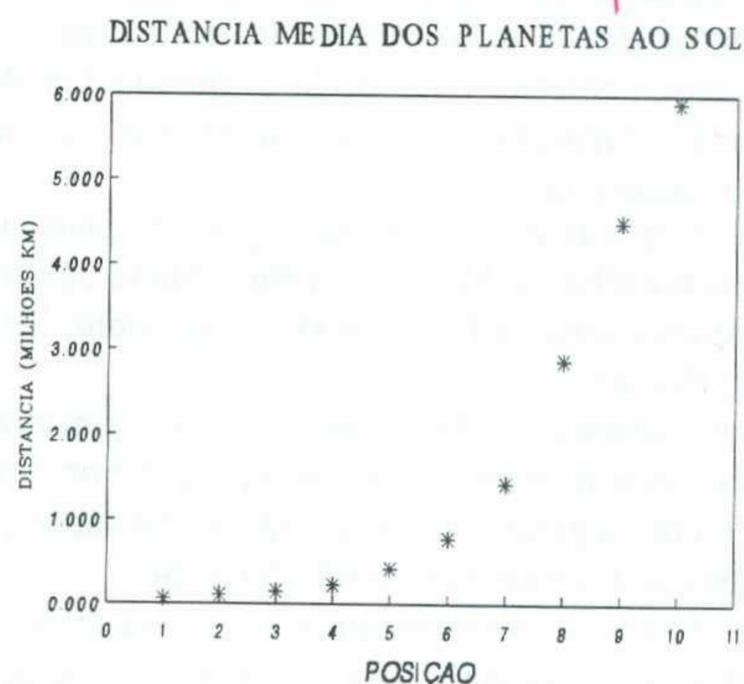
A tabela 1 apresenta a posição (X_i) e a distância média (Y_i) dos planetas em relação ao Sol, em milhões de quilômetros⁵.

tabela 1

Planetas	X_i	Y_i
Mercúrio	1	57,90
Vênus	2	108,20
Terra	3	149,60
Marte	4	227,90
Asteróides	5	418,90
Júpiter	6	778,30
Saturno	7	1.427,00
Urano	8	2.869,60
Netuno	9	4.496,60
Plutão	10	5.900,00

A seguir construiremos o gráfico de dispersão (figura 1):

figura 1



4 - ANÁLISE DE REGRESSÃO

Através dos pontos de observação (X_i, Y_i) no diagrama de dispersão, existe a tendência para realizarmos uma análise de regressão (não-linear) de Y sobre X. A seguir, indicaremos as funções mais comuns e, assim, escolheremos aquela que apresentar os melhores coeficientes de correlação e de determinação⁶:

a) incluindo a faixa de asteróides
(tabela 2a)

REGRESSÃO	a	b	R^2	R
Linear	-1.718,41	611,24	0,79	0,8888
Exponencial	32,01	0,54	0,99	0,9950
Logarítmica	-1.483,32	2.070,07	0,53	0,7280
Geométrica	25,98	2,09	0,89	0,9434

b) excluindo a faixa de asteróides
(tabela 2b)

REGRESSÃO	a	b	R ²	R
Linear	-1.818,27	719,55	0,83	0,9110
Exponencial	28,32	0,62	0,98	0,9899
Logarítmica	-1.479,57	2.291,18	0,58	0,7616
Geométrica	25,82	2,26	0,89	0,9434

Adotando como critério o valor do coeficiente de determinação R² para a escolha da regressão a ser efetuada, a função exponencial estimada (tabela 2a) é a que apresentou um melhor resultado⁷.

Por outro lado, há necessidade de determinar a equação de regressão, com 10 casas de aproximação decimal, com a finalidade de melhorar a precisão dos resultados alcançados na tabela 2a. Com auxílio dos logaritmos neperianos, calcularemos os valores de $Z_i = \text{Ln } Y_i$ (tabela 3) para os X_i observados, assim:

tabela 3

X _i	Y _i	Z _i = Ln Y _i	X _i .Z _i	X _i	Z _i
1	57,90	4,0587173846	4,0587173846	1	16,4731868079
2	108,20	4,6839813664	9,3679627328	4	21,9396814409
3	149,60	5,0079650655	15,0238951966	9	25,0797140977
4	227,90	5,4289069363	21,7156277450	16	29,4730305225
5	418,90	6,0376322280	30,1881611398	25	36,4530029200
6	778,30	6,6571120540	39,9426723238	36	44,3171408991
7	1427,00	7,2633296175	50,8433073223	49	52,7559571321
8	2869,60	7,9619279262	63,6954234097	64	63,3922963023
9	4496,60	8,4110768346	75,6996915116	81	70,7462135180
10	5900,00	8,6827076299	86,8270762989	100	75,3894117862
∑ ⁵⁵	64,1933570429	397,3625350653	385	436,0196354266	

Em continuação, os parâmetros "a" e "b" da equação de regressão $\hat{Y} = a.e^{bx}$, são:

$$b = \frac{\sum X_i \cdot Z_i - \frac{\sum X_i \cdot \sum Z_i}{n}}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}}$$

$$b = \frac{397,3625350653 - 353,0634637360}{385 - 302,25} = 0,5369584404$$

As médias de Z_i e X_i são respectivamente:

$$\bar{Z}_i = \frac{\sum Z_i}{n} = \frac{64,1933570429}{10} = 6,4193357043$$

$$\bar{X}_i = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{55}{10} = 5,50$$

Para cálculo de "a", temos:

$$a = e^{(Z_i - b \cdot X_i)} = e^{(6,4193357043 - 0,5369584404 \cdot 5,5)}$$

a = 32,0105098709, resultando na equação de regressão:

$$\hat{Y} = [Y = 32,0105098709 \cdot e^{0,5369584404 \cdot X}]^{3*}$$

4.1.- O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO (R)

Coefficiente que mede o grau de afinidade entre as variáveis da posição (X_i) e da distância média (Y_i)⁶:

$$R = \frac{\sum X_i \cdot Z_i - \frac{\sum X_i \cdot \sum Z_i}{n}}{\sqrt{\left(\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}\right) \left(\sum Z_i^2 - \frac{(\sum Z_i)^2}{n}\right)}}$$

$$R = \frac{397,3625350653 - 353,0634637360}{\sqrt{(385 - 302,5) \cdot (436,0196354266 - 412,0787088437)}}$$

$$R = 0,996775$$

Baseados no valor do coeficiente R encontrado, podemos afirmar que existe uma alta correlação positiva entre as variáveis da posição (X_i) e da distância média (Y_i)⁶.

3* - e = 2,7182818284..... base dos logaritmos neperianos

4.2.- O COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO (R^2).

Coefficiente que pode ser interpretado como a fração da variação total explicada pela equação de regressão de mínimos quadrados. Assim:

$$R^2 = (0,995346)^2 = 0,993561.$$

Neste caso, podemos dizer que 99,36% da variação dos Y_i (distância média do Sol) podem ser explicados pela relação entre Y_i e X_i (Posição dos Planetas)⁷.

4.3.- INTERPOLAÇÃO

Substituindo a posição (X_i) dos planetas na equação de regressão, determinaremos as distâncias (\hat{Y}_i) e os desvios ($D_i = Y_i - \hat{Y}_i$)⁷:

tabela 4

X_i	Y_i	\hat{Y}_i	$D_i = Y_i - \hat{Y}_i$
1	57,90	54,7634347797	3,1365652203
2	108,20	93,6890352874	14,5109647126
3	149,60	160,2827756951	-10,6827756951
4	227,90	274,2110440750	-46,3110440750
5	418,90	469,1190077449	-50,2190077449
6	778,30	802,5666660140	-24,2666660140
7	1.427,00	1.373,0274040556	53,9725959444
8	2.869,60	2.348,9690416001	520,6309583999
9	4.496,60	4.018,6055588532	477,9944411468
10	5.900,00	6.875,0121230423	-975,0121230423

4.4.- O ERRO PADRÃO DA ESTIMATIVA

É uma medida de dispersão que possui as mesmas propriedades do desvio padrão⁸, logo:

$$S_{y,x} = \sqrt{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 / n} = 381,92761$$

A seguir, construiremos o gráfico da equação de regressão (figura 2).

Pelo gráfico podemos notar a existência de um bom ajustamento da curva aos pontos de observação.

5.- ANÁLISE PARA OS DESVIOS (D_i)

Em continuação, construiremos o diagrama de dispersão dos pontos (X_i, D_i), com a finalidade de obter uma função que a eles se ajuste. Pela pouca quantidade de pontos observáveis, encontramos uma certa dificuldade de interpretação gráfica desses desvios (figura 3). Para melhor compreensão, vamos unir cada um dos pontos do diagrama por curvas suaves, admitindo que eles pertençam ao gráfico de uma função de variável real (figura 4).

figura 2

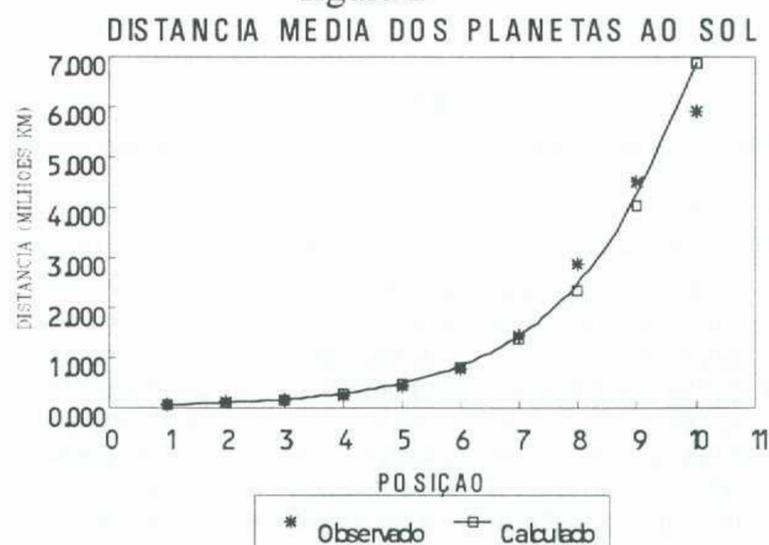


figura 3



figura 4



5.1.- APROXIMAÇÃO POR POLINÔMIOS PARA OS DESVIOS (D_i)

Pela representação gráfica anterior concluímos que existe a possibilidade de encontrarmos uma função utilizando o método de aproximação por polinômios, ou regressão de n -ésima ordem que se ajuste aos desvios D_i ; como critério para escolha do grau do polinômio usaremos os coeficientes de correlação, de determinação ou também o erro padrão de estimativa; em seguida realizaremos aproximações por polinômios de diferentes graus:

tabela 5

GRAU	R	R^2	$S_{d.x}$
5°	0,992435	0,984927	74,137536
6°	0,995944	0,991905	62,735390
7°	0,996995	0,994000	66,151403
8°	0,999433	0,998866	40,669163

Pelos resultados acima, adotaremos o erro padrão da estimativa para a escolha do polinômio de 8° grau como sendo o polinômio que melhor se ajusta aos desvios D_i . Basta agora determinarmos os seus parâmetros pelo método dos mínimos quadrados⁹. Assim:

$P_8(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \dots + a_8X^8$
cujos parâmetros: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_8$ são:

$$a_0 = 5.772,8800000000 \quad a_1 = -14.927,8759983500$$

$$a_2 = 14.996,2262527160 \quad a_3 = -7.788,0354012443$$

$$a_4 = 2.321,1503140256 \quad a_5 = -411,4415705760$$

$$a_6 = 42,7358985301 \quad a_7 = -2,3938021546$$

$$a_8 = 0,0556572038$$

5.2.- O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO (R)

$R = 0,999433$: este resultado nos indica que existe uma alta correlação positiva entre a posição (X_i) dos planetas e os desvios (D_i), obtidos pela diferença entre os valores observados (Y_i) e os valores estimados (\hat{Y}_i)⁶.

5.3.- O COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO (R^2)

$R^2 = (0,999433)^2 = 0,998866$ ou 99,89% da variabilidade dos desvios (D_i) podem ser explicados pela relação entre D_i e X_i ⁶.

5.4. - INTERPOLAÇÃO

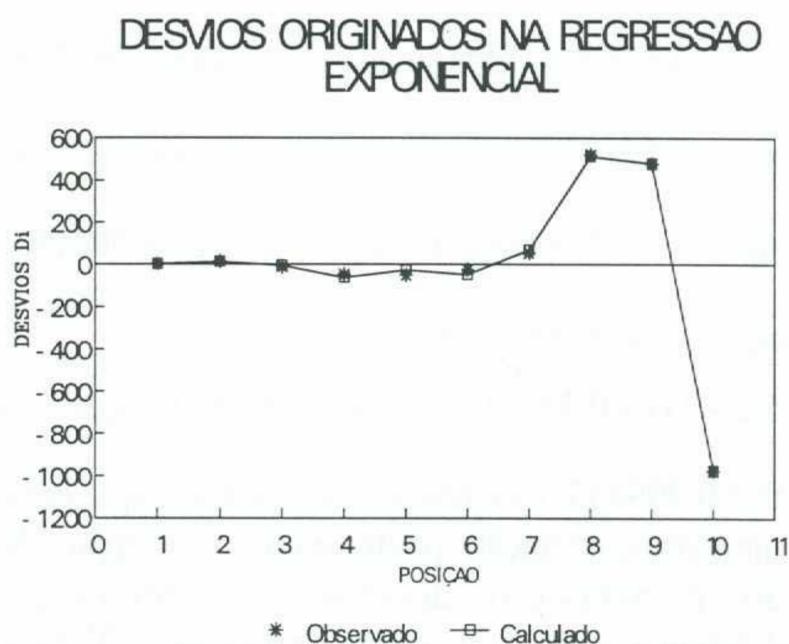
Utilizando o polinômio $P_8(X)$, calcularemos por interpolação os valores estimados para os desvios D_i ⁹; portanto:

tabela 6

X_i	D_i	\hat{D}_i	$E_i = D_i - \hat{D}_i$
1	3,1365652203	3,3049181976	- 0,1683529773
2	14,5109647126	12,9672125543	+ 1,5437521583
3	- 10,6827756951	- 4,3985694540	- 6,2842062411
4	- 46,3110440750	- 61,2175531046	+ 14,9065090296
5	- 50,2190077449	- 27,5106002170	- 22,7084075279
6	- 24,2666660140	- 47,3079028820	+ 23,0412368680
7	53,9725959444	69,5452045500	- 15,5726086056
8	520,6309583999	513,8704124900	+ 6,7605459099
9	477,9944411468	479,7052462000	- 1,7108050532
10	-975,0121230423	-975,2043769000	+ 0,1922538577

A seguir, construiremos o gráfico do polinômio $P_8(X)$, com o objetivo de observarmos o seu comportamento (figura 5).

figura 5



Pelo gráfico de $P_8(X)$ podemos verificar que há um bom ajustamento da curva aos pontos (X_i, D_i) .

6.- ANÁLISE DOS DESVIOS E_i

Pelo diagrama de dispersão podemos observar que os pontos (X_i, E_i) não formam a imagem de uma reta ou uma curva; eles se apresentam em forma de anel ou disco (figura 6), indicando que não há inter-relacionamento entre as variáveis.

Por outro lado, após efetuarmos a análise de regressão linear e aproximação por polinômios de diferentes graus, verificamos que os coeficientes de correlação e determinação expressam um resultado quase nulo. Assim, podemos afirmar que não existe uma função que se ajuste a estes pontos.

6.1.- SOLUÇÃO POR ARTIFÍCIO DE CÁLCULO

Retornando à tabela 6, podemos observar que os desvios E_i formam uma sequência de números oscilantes ou alternados. A seguir, exprimiremos

estes valores em módulo ou valor absoluto, sendo que a função resultante dever-se-á multiplicar pela expressão:

$$(-1)^X, \quad X = 1, 2, 3, \dots, 10$$

tabela 7

X_i	$E_i = D_i - \hat{D}_i$	$ E_i $
1	- 0,1683529773	0,1683529773
2	+ 1,5437521583	1,5437521583
3	- 6,2842062411	6,2842062411
4	+ 14,9065090296	14,9065090296
5	- 22,7084075279	22,7084075279
6	+ 23,0412368680	23,0412368680
7	- 15,5726086056	15,5726086056
8	+ 6,7605459099	6,7605459099
9	- 1,7108050532	1,7108050532
10	+ 0,1922538577	0,1922538577

Analisando o gráfico (figura 7), existe a possibilidade de encontrarmos uma função polinomial que se ajuste aos desvios $|E_i|$.

A seguir apresentaremos o resumo:

tabela 8

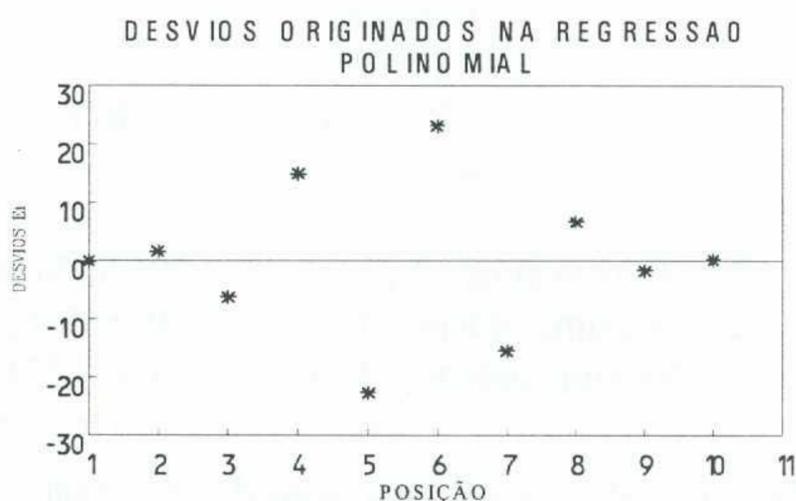
	GRAU	R	R^2	$S_{ e ,x}$
	5°	0,991982	0,984029	1,717772
	6°	0,999844	0,999688	0,277402
	7°	0,999848	0,999696	0,335280
	8°	0,999999	0,999998	0,041553

Analisando os resultados obtidos na tabela anterior, também adotaremos o erro padrão da estimativa para escolher o polinômio de 8° grau como o polinômio que melhor se ajusta aos desvios $|E_i|$; portanto, deveremos calcular os seus parâmetros pelo método dos mínimos quadrados⁹. Então:

$$Q_8(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 + \dots + b_8X^8$$

cujo os parâmetros: $b_0, b_1, b_2, \dots, b_8$

figura 6



são:

$$b_0 = 24,0191000000 \quad b_1 = -65,2676233813$$

$$b_2 = 70,1552185802 \quad b_3 = -39,3493233255$$

$$b_4 = 12,7559157791 \quad b_5 = -2,3827449645$$

$$b_6 = 0,2513657537 \quad b_7 = -0,0139132974$$

$$b_8 = 0,0003144521$$

6.2.- O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO (R)

$R = 0,999999$: este resultado nos indica que existe uma alta correlação positiva entre a posição (X_i) dos planetas e os desvios $|E_i|$ ⁶.

6.3.- O COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO (R^2)

$R^2 = (0,999999)^2 = 0,999998$ ou 99,9998% da variabilidade dos desvios $|E_i|$ podem ser explicados pela relação entre $|E_i|$ e X_i ⁶.

6.4. - INTERPOLAÇÃO

Utilizando o polinômio $Q_8(X)$, para calcularmos por interpolação os valores para os desvios $|E_i|$ ⁹, temos:

tabela 9

X_i	$ E_i $	$ \hat{E}_i $	$F_i = E_i - \hat{E}_i $
1	0,1683529773	0,1683113836	0,0000415937
2	1,5437521583	1,5439622463	-0,0002100880
3	6,2842062411	6,2839940184	0,0002122227
4	14,9065090296	14,9056035179	0,0009055117
5	22,7084075279	22,7117735263	-0,0033659984
6	23,0412368680	23,0359532706	0,0052835974
7	15,5726086056	15,5773517766	-0,0047431710
8	6,7605459099	6,7580138822	0,0025320277
9	1,7108050532	1,7115573040	-0,0007522508
10	0,1922538577	0,1921577850	0,0000960727

Na tabela anterior podemos verificar a precisão do polinômio $Q_8(X)$, utilizado para calcular os valores dos desvios $|E_i|$.

Por outro lado, os desvios F_i são valores pouco significativos como resíduos, devido à grandeza da variável distância média (Y_i).

7.- A FUNÇÃO GERAL ESTIMADA

Finalmente, a função procurada para determinar a distância média dos planetas ao Sol é a soma das três funções estimadas através das regressões exponencial e de n -ésima ordem. Em outras palavras:

$$F(X) = a.e^{b.X} + P_8(X) + (-1)^X \cdot Q_8(X)$$

Em continuação, apresentaremos um resumo dos valores das funções parciais da função F :

tabela 10

X	$a.e^{(b.X)}$	$P_8(X)$	$(-1)^X \cdot Q_8(x)$	F(X)
1	54,763435	+ 3,301350	- 0,168310	57,896475
2	93,689035	+ 12,963644	+ 1,543960	108,196640
3	160,282776	- 4,402138	- 6,283992	149,596646
4	274,211044	- 61,221122	+ 14,905602	227,895524
5	469,119008	- 27,514174	- 22,711774	418,893060
6	802,566666	- 47,311495	+ 23,035958	778,291129
7	1.373,027404	+ 69,541558	- 15,577370	1.426,991592
8	2.348,969042	+ 513,866625	+ 6,758066	2.869,593733
9	4.018,605561	+ 479,701127	- 1,711685	4.496,595002
10	6.875,012126	- 975,209200	+ 0,192440	5.899,995366

(tabela 11)
 DISTÂNCIA MÉDIA DOS PLANETAS AO SOL,
 CALCULADA ATRAVÉS DA EQUAÇÃO DE VALDERRAMA
 (em milhões de Km)

PLANETAS	OBSERVADA (Y_i)	CALCULADA (\hat{Y}_i)	PRECISÃO (%)	DIFERENÇA ($D=Y_i-\hat{Y}_i$)
Mercúrio	57,90	57,89647533	99,993913	0,00352466
Vênus	108,20	108,19664025	99,996895	0,00335974
Terra	149,60	149,59664579	99,997758	0,00335420
Marte	227,90	227,89552394	99,998036	0,00447605
Asteróides	418,90	418,89305998	99,998343	0,00694001
Júpiter	778,30	778,29112932	99,998860	0,00887067
Saturno	1.427,00	1.426,99159214	99,999410	0,00840785
Urano	2.869,60	2.869,59373334	99,999782	0,00626665
Netuno	4.496,60	4.496,59500240	99,999889	0,00499759
Plutão	5.900,00	5.899,99536569	99,999921	0,00463430

Sendo o erro padrão estimado: $S_{y,x} = 0,00581$.

figura 7



8.- DISCUSSÃO

8.1.- A PRECISÃO DA FUNÇÃO

Para realizar boas estimativas através da função encontrada, deveremos trabalhar com aproximação de 10 casas decimais nos parâmetros da mesma, obtendo assim uma precisão de 99,99%.

8.2.- O ERRO PADRÃO DA ESTIMATIVA

O erro padrão nas três fases do problema foi diminuindo até se tornar um valor muito próximo de zero, isto é, a dispersão é quase nula.

tabela 12

FASE	REGRESSÃO PADRÃO DA EST.	ERRO
1ª	Exponencial (Y_i)	381,927614
2ª	N-ésima ordem (D_i)	40,669163
3ª	N-ésima ordem ($ E_i $)	6,041553

Para um estudo mais detalhado do erro padrão, faremos a representação gráfica (figura 8).

8.3.- COMPARAÇÃO

A seguir, apresentaremos os valores obtidos por meio da equação de Damiani e, dessa maneira, estabeleceremos uma comparação com os resultados alcançados com a equação de Valderrama (figura 9):

(tabela 13)
 DISTÂNCIA MÉDIA DOS PLANETAS EM
 RELAÇÃO AO SOL, UTILIZANDO-SE A
 EQUAÇÃO DE DAMIANI
 (em milhões de km)

POSIÇÃO (X_j)	PLANETA	OBSERVADA (Y_i)	CALCULADA (\hat{Y}_i)	DIFERENÇA ($D = Y_i - \hat{Y}_i$)
01	Vulcano	—	14,06	—
02	Mercúrio	57,90	55,65	2,25
03	Vênus	108,20	108,46	- 0,26
04	Terra	149,60	159,77	- 10,17
05	Marte	227,90	221,56	6,34
06	Asteróides	418,90	364,72	54,18
07	Júpiter	778,30	738,72	39,58
08	Saturno	1.427,00	1.523,83	- 96,83
09	Urano	2.869,60	2.802,00	67,60
10	Netuno	4.496,60	4.416,64	79,96
11	Plutão	5.900,00	6.000,16	100,16
12	X	—	7.360,47	—

figura 8



Os resultados da distância média, utilizando-se a equação de Damiani, originalmente se encontram em U.A. Para efeito de comparação, as unidades foram transformadas em Km, sendo utilizado o valor de 149,6 milhões de km³. Não faremos uso dos valores encontrados para Vulcano e o Planeta X, no cálculo do erro padrão; portanto:

$$S_{X,n} = 59,179591$$

9.- EXTRAPOLAÇÃO

Com os parâmetros estimados, a equação de regressão nos permite fazer previsões sobre a variável Y para dados valores de X. Entretanto, não é recomendável fazer estimativas para Y quando os valores de X são muito afastados de intervalo dos X_i observados na amostra. Como a posição X = 11 não é muito afastada do intervalo⁶, vamos então estimar algumas das características mais importantes para o planeta desconhecido "X".

9.1.- DISTÂNCIA MÉDIA ESTIMADA

Utilizando a função F, temos:

F(11) = 14.295,37 bilhões de km (figura 10), ou

F(11) = 95,56 U.A.

9.2- O PERÍODO ORBITAL MÉDIO ESTIMADO

De acordo com a terceira Lei de Kepler⁵, o período orbital do planeta (figura 11):

$$T^2 = d^3 \Rightarrow T = \sqrt{(95,56)^3} = 934,14 \text{ anos}$$

ou 934 anos e 51 dias para realizar uma órbita ao redor do Sol (figura 12).

9.3.- A ACELERAÇÃO CENTRÍPETA MÉDIA ESTIMADA¹¹

distância média: $d = 14.295,37 \cdot 10^6 \text{ km} = 1,43 \cdot 10^{13} \text{ m}$

período orbital: $T = 934 \text{ anos e } 51 \text{ dias} = 2,95 \cdot 10^{10} \text{ s}$

$$a = \frac{4\pi^2 \cdot d}{T^2} = \frac{4 \cdot (3,141592)^2 \cdot 1,43 \cdot 10^{13}}{(2,95 \cdot 10^{10})^2}$$

$a = 6,49 \cdot 10^{-7} \text{ m.s}^{-2}$ (figura 12)

9.4.- A VELOCIDADE ORBITAL MÉDIA ESTIMADA¹²

$$a = \frac{v^2}{d} \Rightarrow v^2 = a \cdot d = 6,49 \cdot 10^{-7} \cdot 1,43 \cdot 10^{13}$$

$$v^2 = 9,28 \cdot 10^6$$

$$v = 3,05 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

$$v = 3,05 \text{ km/s} \text{ (figura 13)}$$

Pelos resultados acima, apresentaremos um resumo destes dois vetores, como também o período de revolução dos planetas¹¹:

tabela 14

PLANETA	PERÍODO (anos)	ACELERAÇÃO (m.s ⁻²)	VELOCIDADE (km/s)
Mercúrio	0,2407	3,95 . 10 ⁻²	47,90
Vênus	0,6150	1,13 . 10 ⁻²	35,10
Terra	1,0000	5,91 . 10 ⁻³	29,80
Marte	1,8800	2,55 . 10 ⁻³	24,10
Júpiter	11,8600	2,18 . 10 ⁻⁴	13,10
Saturno	29,5000	6,50 . 10 ⁻⁵	9,70
Urano	84,0000	1,59 . 10 ⁻⁵	6,80
Netuno	64,8000	6,56 . 10 ⁻⁶	5,40
Plutão	247,7000	3,80 . 10 ⁻⁶	4,70
X	934,1448	6,49 . 10 ⁻⁷	3,05

figura 9



figura 10

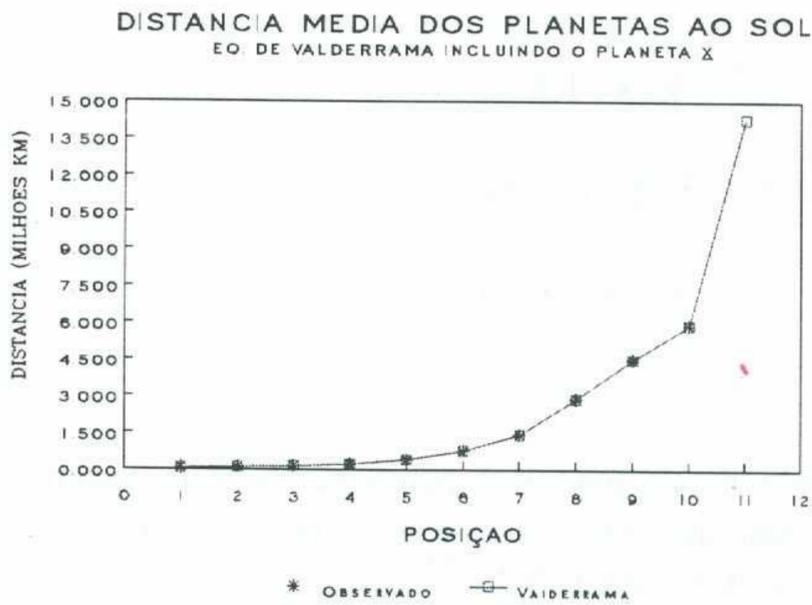


figura 11

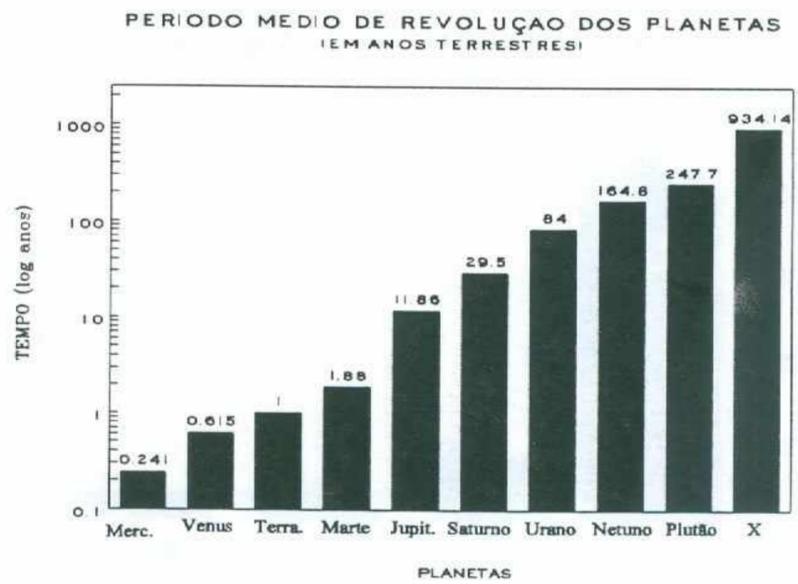


figura 12

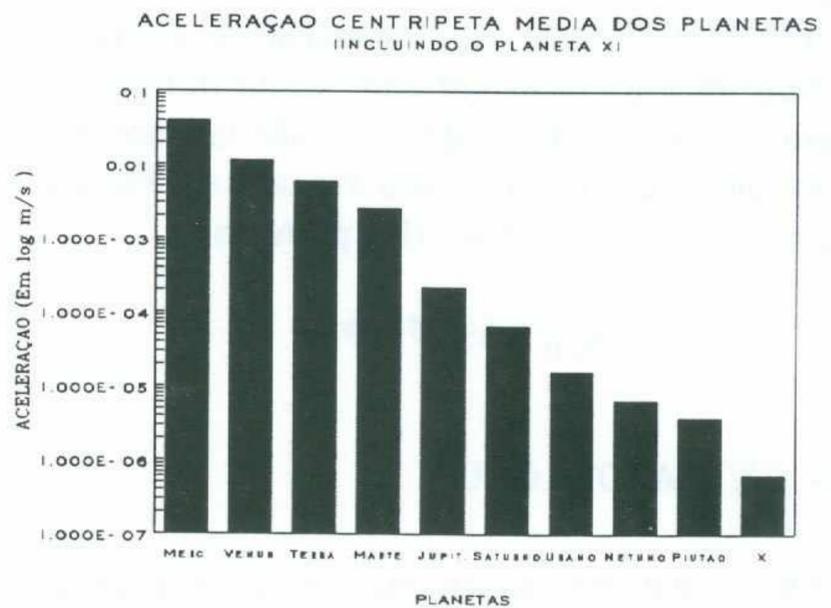
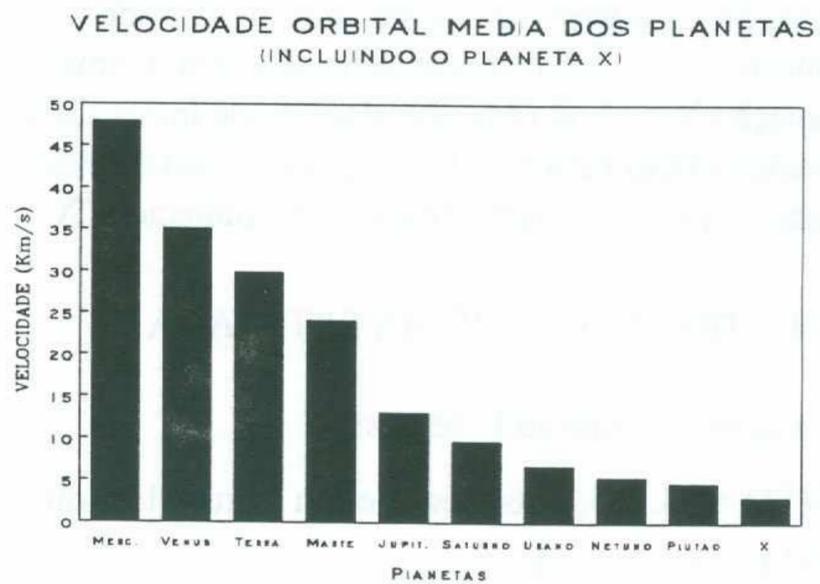


figura 13



9.5.- A MASSA ESTIMADA

Com a descoberta de Netuno, os astrônomos refizeram os cálculos da órbita de Urano levando em consideração a influência deste novo planeta. Esperavam uma concordância satisfatória entre os cálculos e a órbita de Urano, porém ainda persistem certas anomalias. Netuno era uma explicação parcial; além dele, havia outra força atraindo Urano. Esta descoberta levou à procura de outro planeta desconhecido, sendo descoberto Plutão em 1930, o nono e último planeta do Sistema Solar. A descoberta de Caronte, o único satélite desse planeta, possibilitou aos astrônomos determinar a sua massa, aproximadamente em 0,002 da massa terrestre. Mesmo com a descoberta de Plutão, as perturbações na trajetória de Urano e Netuno continuam.

Sendo Plutão um planeta muito pequeno, não poderia exercer uma força capaz de provocar irregularidades nas órbitas desses planetas. Por este motivo, acredita-se que existe outro planeta no Sistema Solar, o décimo, denominado de Planeta "X".

10.- CONCLUSÕES

Segundo MACHADO (1983), desde o século XVIII os astrônomos se preocuparam em saber se a distância dos planetas em relação ao Sol seria aleatória ou se essa distância poderia ser representada através de uma lei física bem definida e matematicamente representável. Porém, conforme FIOLETTI (1992), este problema remonta até um dos sábios mais famosos da antigüidade: Arquimedes (Siracusa, 287 - 212 a.C.) que tentou estabelecer uma relação mística entre as notas musicais e as distâncias dos vários corpos celestes à Terra¹⁴.

Um dos objetivos desta pesquisa é demonstrar que existe uma estrutura matemática que nos fornece com bastantes precisão as distâncias médias dos nove planetas conhecidos em relação ao Sol e, assim, colocar um ponto final no enigma

aleatoriedade-determinismo do problema em questão.

O outro objetivo consiste na localização do Planeta "X" (caso exista), como também determinar algumas de suas características mais importantes. Utilizando a equação de Damiani para o cálculo da distância média em relação ao Sol, obtemos como resultado apenas 7.360,47 bilhões de quilômetros³ (com um período orbital de 345 anos e 41 dias)^{5*}, resultado este pouco provável, pois, com o arsenal tecnológico que se possui hoje na Astronomia, o referido planeta já deveria ter sido localizado.

Os estudos realizados por John Anderson em 1988, sobre as anomalias nas órbitas de Urano e Netuno, utilizando os dados enviados pelos satélites Pioneer 10 e Pioneer 11 ao Laboratório de Jato Propulsão de Pasadena (Califórnia), constataram por meio de cálculos astronômicos muito precisos a existência de uma força que advém de um planeta de massa cinco vezes maior que a Terra e que, para realizar uma volta completa em torno do Sol, demoraria de 700 a 1.000 anos (um período orbital médio de 850 anos e uma distância média de 13.423,86 bilhões de quilômetros)^{6**}, uma órbita que seria acentuadamente excêntrica e perpendicular em relação à dos outros planetas do sistema solar¹⁵. De acordo com JASTROW (1990), a distância média e o período orbital devem estar em torno de 15 bilhões de quilômetros e 1.000 anos respectivamente¹³.

Já ASIMOV (1992) estima o período orbital em cerca de 800 anos, apresentando uma órbita muito elíptica (12.892,14 bilhões de quilômetros)^{7***}, levando-o muito perto dos planetas exteriores, exercendo uma ação gravitacional durante um século e passado a diminuir até ficar reduzido a praticamente zero em um período de 700 anos¹⁶. Pelos resultados alcançados neste trabalho, temos a distância média estimada de 14.295,37 bilhões de quilômetros com um período orbital médio de 934 anos e 51 dias, valores intermediários aos estimados por Anderson, Jastrow e Asimov.

5* - Cálculos realizados pelo autor da pesquisa

6** - Cálculos realizados pelo autor da pesquisa

7*** - Cálculos realizados pelo autor da pesquisa

A velocidade orbital média é estimada em 3,05 km/s e a aceleração centrípeta estimada em $6,49 \times 10^{-7} \text{ m.s}^{-2}$, parâmetros que se enquadram perfeitamente na tabela 15, apresentada por CANIATO¹¹ (1990). Por outro lado, o astrônomo Myles Standish, também do Laboratório de Jato Propulsão, os dados fornecidos em 1989 pela sonda Voyager 2 sobre os planetas externos: Júpiter, Saturno, Netuno, Urano e Plutão. Dessa vez, procurou-se um desvio sofrido nas órbitas de Urano e Netuno, porém ambos vêm seguindo fielmente a sua rota desde 1833 e 1846, respectivamente¹⁷.

Outras informações vêm do satélite IRAS, que realizou um mapeamento de 70% do céu em busca de fontes de calor, entre as quais deveria estar o novo planeta¹⁷.

Apesar de não ter sido localizado o tão esperado planeta, as expectativas continuam.

Também podemos concluir que, para certos fenômenos que necessitem de soluções exatas, poderemos procurar funções que se adaptem aos resíduos ou desvios originados nas regressões.

Para finalizar, apesar de a equação deduzida neste artigo ser muito precisa, ela é um tanto complexa, devido à quantidade de parâmetros envolvidos. Porém, existe sempre a possibilidade de que apareça outra mais simples e que também seja eficaz.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. SEAGAN, C. Cosmos. 2ª Ed. Rio de Janeiro: F. Alves, 1982. p. 51-71.
2. GATLAND, K. Explorando o espaço. São Paulo: Brasiliense, 1974. p. 05-06.
3. MACHADO, C. A equação dos planetas. Ciências Ilustrada. São Paulo: n. 18. Ano 2. mar. 1983. p. 16-19
4. SILK, J. O big bang - a origem do universo. Brasília: Universidade de Brasília, 1985. p. 280/371
5. NUNES CARVALHO, U. Elementos de cosmografia. Curitiba: M. Cavalcanti, 1971. p. 07-12.
6. DE FRANCISCO, W. Estatística. São Paulo: Atlas, 1982. p. 181-208.
7. AYRES, M.; AYRES M. Jr. Aplicações estatísticas em basic. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. p. 240-254.
8. SPIEGEL, M. Estatística. 2ª ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1985. p. 300-301.
9. POOL, L.; BORCHERS, M.; KOESSEL, K. Programas usuais em Basic - TRS 80 e compatíveis. São Paulo: McGraw-Hill, 1985. p. 147-149.
10. BORATO, F. Basic para engenheiros e cientistas. Rio de Janeiro: Livros Técnicos, 1984. p. 70-71.
11. CANIATO, R. O Céu. São Paulo: Ática, 1990. p. 75-77.
12. DELL'ARCIPRETE N; GRANADO N. Física I - mecânica. São Paulo: Ática, 1983. p. 183.
13. JASTROW, R. Ciências aberta - jornada para as estrelas. São Paulo: M. Fontes, 1990. p. 95-97.
14. FIOLHAIS, C. Física divertida. 3º ed. Lisboa: Gradiva, 1992. p. 70-71.
15. REVISTA VISÃO. São Paulo: Visão, Ano 37. n. 18, maio 1988. p. 39.
16. ASIMOV, I. Fronteiras. São Paulo: Siciliano, 1992. p. 219-221.
17. REVISTA SUPERINTERESSANTE. São Paulo: Abril, Ano 6. n. 5. maio 1993. p. 15.