

UM TRATADO SOBRE SISTEMAS DE LOGARITMOS

Adalberto Valderrama Gerbasi *

Resumo

Desde a invenção dos logaritmos em 1614, os sistemas de Napier (base "e") e de Briggs (base 10) dominaram esta importante área da Matemática até os dias de hoje, por tal motivo, este artigo apresenta um tratado sobre o desenvolvimento de dois novos sistemas que utilizam como bases os valores de $\pi = 3,141592\dots$ e do número áureo (1,618) de maneira que tanto a Matemática como outras ciências tenham a disposição sistemas de logaritmos alternativos e assim possam utilizar àquele que melhor se adapte ao problema ou fenômeno em estudo.

Abstract

Since the invention of the logarithms in 1614, Napier's (base "e") and Briggs's (base 10) systems have mastered this important area of Math until nowadays, because of that, this article presents a treat about the development of two new systems that used as bases the values of $\pi = 3,141592\dots$ and of the aureate number (1,618), so that as Math as other sciences have alternative logarithm systems available and this way they can use the best system that adapts to the problem or phenomenon in study.

* Mestre em ciências. Docente da UNIPAR

Introdução

A partir do século XVI, a sociedade europeia apresentava um certo grau de evolução que coincide com o desenvolvimento do comércio, da astronomia e da navegação. Os cálculos matemáticos tornaram-se extensos e complexos, com numerosas multiplicações e radiciações, favorecendo o aperfeiçoamento de instrumentos matemáticos para sua realização, conforme Giovani (1992: 183). Um desses instrumentos foram os logaritmos, palavra composta por dois vocábulos gregos: Logos (razão) e arithmos (números).

Boyer (1990: 213-216) narra que os logaritmos e o próprio vocábulo foram criados em 1594 por um proprietário de terras, o escocês John Napier ou Neper (1550 – 1617), que não era matemático profissional. Ele trabalhou durante vinte anos antes de publicar seus resultados em 1614, através da obra: "Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos". Devemos esclarecer que Napier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição era diferente da conhecida na atualidade e os princípios de sua obra eram explicados em termos geométricos. Contudo, Napier construiu suas tabelas numericamente em vez de geometricamente, ou seja, as tabelas foram compiladas por multiplicações repetidas, equivalentes às potências

de 0,9999999. Mas, o seu objetivo principal era a simplificação dos cálculos que envolviam produtos e quocientes. Esses logaritmos hoje são denominados de logaritmos neperianos, sendo representados por "ln", e cuja base é o número irracional $e = 2,7182818\dots$, também conhecido por número de Euler, de acordo com Gentil (1998: 166).

Em 1617, o matemático inglês Henry Briggs (1561 – 1639), professor de Geometria em Oxford, publicou a primeira tabela de logaritmos decimais ou comuns dos números de 1 a 1000, todos calculados com quatorze casas decimais, utilizando, porém, potências de 10. A partir do trabalho de Briggs, as leis usuais sobre logaritmos são as mesmas até os dias atuais e as palavras “característica” e “mantissa” são também de sua responsabilidade.

Entretanto, hoje em dia sabemos que os logaritmos não são de autoria de uma única pessoa. Idéias semelhantes foram desenvolvidas independentemente na Suíça pelo relojoeiro Jobst Bürgi (1552 – 1632), possivelmente em 1588 e publicadas apenas em 1620. Em comparação com a obra de Napier, as diferenças entre ambas consistem na terminologia e nos valores numéricos que utilizavam e os princípios fundamentais eram os mesmos. Bürgi deve ser considerado um descobridor independente e que não teve o reconhecimento pela invenção, devido à prioridade de Napier na publicação. Os dois sistemas partilham da desvantagem de o logaritmo de um produto ou quociente não ser a soma ou a diferença dos logaritmos.

Na Matemática, poucas vezes uma descoberta teve tanto sucesso quanto a invenção dos logaritmos. O resultado foi o aparecimento de numerosas tabelas. Por muito tempo, as tabelas facilitaram alguns cálculos laboriosos e demorados, porém, atualmente dispomos de recursos mais avançados como as calculadoras eletrônicas e os computadores, tornando as tabelas obsoletas. Devemos ressaltar que a teoria dos logaritmos continua sendo muito importante por suas aplicações na Matemática, na Física, Química, Biologia,

Economia, entre outras.

Muitos fenômenos da natureza são explicados através de funções exponenciais, trazendo como consequência cálculos que envolvem frequentemente os logaritmos.

As bases utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho são os números 3,141592... e 1,6180, este último é mais conhecido como número áureo ou número divino, segundo Marmo (1998: 32).

1. Sistema de logaritmos de Base π

Esta talvez seja uma das constantes mais importantes que existam na Matemática. Antigas civilizações, como a egípcia estimaram os valores:

$(3 \frac{1}{6}$ ou 3,16666...) e a babilônica:

$(3 \frac{1}{8}$ ou 3,1250) para "p", muito próximos ao

conhecido na atualidade. O grande sábio grego Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) encontrou uma aproximação para "p" expressa pelas desigualdades

$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{10}{70}$, isto é, 3,140845... < p <

3,142857..., sendo superior aos valores utilizados pelos egípcios e babilônios.

Outros matemáticos também calcularam valores muito precisos para "p", entre os quais podemos mencionar: François Viète, (1540 – 1603), que calculou o valor com dez algarismos significativos e foi o primeiro matemático a expressá-lo analiticamente; Ludolph van Ceulen, (1540 – 1610), que conseguiu uma aproximação com trinta e cinco casas decimais.

Em 1737, Leonard Euler, (1707 – 1783), adotou a letra grega "p" para representar a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência.

O sistema de base "p" passou a ser denotado pela expressão "lp" e definido por:

$$N = \pi^x \Leftrightarrow \text{lp } N = x, N > 0.$$

ITERAÇÃO	X_K	$X_{K+1} = X_K - \frac{\pi^X - 1,1}{\pi^X \cdot \ln \pi}$
1	1,000000	0,432304
2	0,432304	0,144563
3	0,144563	0,085362
4	0,085362	0,085362
5	0,083263	0,083260

Quadro 1

A partir desta expressão, podemos construir a função exponencial $f(x) = p^x - N$, e a sua derivada representada através da expressão $f'(x) = p^x \cdot \ln p$. À continuação, pode-se aplicar o Método de Newton-Raphson com $x_0 = 1$ como sendo o ponto inicial e, ao atingir-se o valor de convergência, encontramos a raiz da função. Entretanto, tal valor representa na realidade o logaritmo de N .

Por exemplo, para calcularmos $\log_p 1,1$, a função será denotada por $f(x) = p^x - 1,1$; e a sua derivada, representada por $f'(x) = p^x \cdot \ln p$, aplicando-se o método citado anteriormente com $x_0 = 1$ como ponto inicial, começa-se o processo iterativo e, ao alcançar-se a convergência, aparecerá o resultado procurado para o $\log_p 1,1$. O mesmo, por sua vez, servirá como ponto inicial para o cálculo da raiz ou logaritmo de 1,2, e assim sucessivamente se repetirá o processo para os números de 1 a 20, construindo-se, desta maneira, uma tabela de logaritmos de base p .

2. Método de NEWTON RAPHSON

Segundo Ruggiero (1996: 27-77) este método é utilizado para se obter zeros ou raízes de funções reais através de um algoritmo que tem a propriedade de garantir e acelerar a convergência da raiz procurada, porém, sob certas condições restritivas e relativas à própria convergência. O método demanda operações matemáticas mais complexas porque requer o cálculo da função e a sua derivada a cada iteração efetuada.

Por exemplo, para calcular o "log" 1,1 utiliza-se o algoritmo de Newton-Raphson, conforme **Quadro 1**.

Logo, $\log_p 1,1 = 0,083260$.

Para calcularmos o logaritmo de 1,2, deveremos escolher como ponto inicial $x_0 = 0,085362$. Desta maneira temos, conforme **Quadro 2**.

ITERAÇÃO	X_K	$X_{K+1} = X_K - \frac{\pi^X - 1,2}{\pi^X \cdot \ln \pi}$
1	0,083260	0,162675
2	0,162675	0,159277
3	0,159277	0,159270
4	0,159270	0,159270

Quadro 2

então, $\log 1,2 = 0,159270$, e assim sucessivamente repete-se o processo para calcular o loga-

ritmo dos números de 1,3 a 20. A continuação apresentaremos uma tabela de logaritmos de base "p":

N	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.0000	0.0833	0.1593	0.2292	0.2939	0.3542	0.4106	0.4635	0.5135	0.5607
2	0.6055	0.6481	0.6888	0.7276	0.7648	0.8004	0.8347	0.8677	0.8994	0.9301
3	0.9597	0.9884	1.0161	1.0430	1.0691	1.0944	1.1190	1.1429	1.1662	1.1889
4	1.2110	1.2326	1.2536	1.2742	1.2943	1.3139	1.3331	1.3519	1.3703	1.3883
5	1.4060	1.4233	1.4402	1.4569	1.4732	1.4892	1.5050	1.5204	1.5356	1.5505
6	1.5652	1.5797	1.5939	1.6078	1.6216	1.6351	1.6485	1.6616	1.6746	1.6873
7	1.6999	1.7123	1.7245	1.7365	1.7484	1.7602	1.7717	1.7831	1.7944	1.8055
8	1.8165	1.8274	1.8381	1.8487	1.8592	1.8695	1.8797	1.8898	1.8998	1.9097
9	1.9194	1.9291	1.9386	1.9481	1.9574	1.9667	1.9758	1.9849	1.9938	2.0027
10	2.0115	2.0202	2.0288	2.0373	2.0457	2.0541	2.0624	2.0706	2.0787	2.0867
11	2.0947	2.1026	2.1105	2.1182	2.1259	2.1336	2.1411	2.1486	2.1561	2.1634
12	2.1707	2.1780	2.1852	2.1923	2.1994	2.2064	2.2134	2.2203	2.2271	2.2339
13	2.2407	2.2474	2.2540	2.2606	2.2671	2.2736	2.2801	2.2865	2.2928	2.2991
14	2.3054	2.3116	2.3178	2.3239	2.3300	2.3361	2.3421	2.3480	2.3539	2.3598
15	2.3657	2.3715	2.3772	2.3830	2.3887	2.3943	2.3999	2.4055	2.4111	2.4166
16	2.4220	2.4275	2.4329	2.4383	2.4436	2.4489	2.4542	2.4595	2.4647	2.4699
17	2.4750	2.4801	2.4852	2.4903	2.4953	2.5003	2.5053	2.5103	2.5152	2.5201
18	2.5249	2.5298	2.5346	2.5394	2.5441	2.5489	2.5536	2.5583	2.5629	2.5676
19	2.5722	2.5768	2.5813	2.5859	2.5904	2.5949	2.5993	2.6038	2.6082	2.6126
20	2.6170	2.6213	2.6257	2.6300	2.6343	2.6385	2.6428	2.6470	2.6512	2.6554

TABELA 1 - Logaritmos na base "p"

3. Sistema de logaritmos de base "r"

MARMO (1995: 11) afirma que Pitágoras (570 a.C.) influenciou Platão que declarou:

os números são o mais alto grau de conhecimento.

Foram estudadas dez proporções notáveis, entre as quais a harmônica, a divina ou áurea e a média geométrica, encontradas nas figuras geométricas, nas notas musicais, na geometria dos seres vivos (flores, organismos marinhos e até nos seres humanos), nas obras arquitetônicas etc, como continuação descreveremos brevemente a proporção áurea ou divina.

Carvalho (1985: 134-136) explica que sendo dadas duas grandezas "a" e "b", a sua soma $a + b$ nos fornece o termo requerido:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad (a+b) : a :: a : b$$

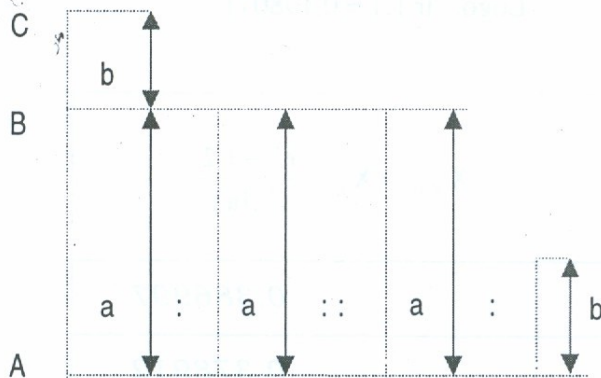
que é a proporção célebre acima citada e que se funda na seção ou corte de ouro. Esta proporção diz que a relação entre a soma de duas grandezas e uma delas (a maior que é no caso "a") é igual à relação entre esta (a) e a outra (b). Isto, de fato, só se obtém quando

$$\frac{a}{b} = 1,618$$

que é o número de ouro, segmento áureo ou relação áurea. Se representarmos graficamente a proporção

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

obteremos a seguinte figura:



Que traduz a relação entre um segmento \overline{AC} e uma de suas partes \overline{AB} ; igualada àquela outra relação existente entre esta parte \overline{AB} e a outra parte menor \overline{BC} . Pela figura acima podemos concluir que

$$\frac{a}{b} = 1,618 \quad e \quad \frac{a+b}{a} = 1,618$$

À determinação do comprimento dessas duas

que dá origem ao número de ouro (1,618), número que é a razão entre os termos da proporção que assim nasce.

Boyer, (1996: 35), narra que o matemático e astrônomo Johann Kepler (1571 – 1630) teria comentado:

(...) a Geometria tem dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras, o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de jóia preciosa.

Todo o processo realizado para construir o sistema de logaritmos na base "p" será repetido para construirmos o sistema de logaritmos na base áurea – base representada pela letra "r". Desta maneira, o sistema será denotado pela expressão "lr" e definido por:

$$N = r^x \Leftrightarrow \ln N = x \ln r, \quad N > 0$$

A partir da expressão, acima construiremos a função exponencial $f(x) = r^x - N$, $f(x) = r^x - N$, e a sua derivada representada através da expressão $f'(x) = r^x \cdot \ln r$. A seguir, aplicar-se-á o Método de Newton – Raphson com

ITERAÇÃO	X_k	$X_{k+1} = X_k - \frac{r^{X_k} - 1,1}{r^{X_k} \cdot \ln r}$
1	0,000000	0,334675
2	0,334675	0,202464
3	0,202464	0,198076
4	0,198076	0,198071
5	0,198071	0,198071

Quadro 3

partes do segmento em questão, Euclides denominava divisão de um segmento em média e extrema razão e

$x_0 = 1$ como sendo o ponto de partida e, ao atingir-se o valor de convergência, estaremos encontrando a

raiz da função. Entretanto, este valor representa na realidade o logaritmo de N .

Por exemplo, para determinar $\ln 1,1$ a função será denotada por $f(x) = r^x - 1,1$ e a sua derivada representada pela expressão $f'(x) = r^x - 1,1$. Aplicando-se o método citado anteriormente e $x_0 = 1$ como sendo o ponto de partida, inicia-se o processo iterativo e, ao atingir-se a convergência, obteremos o resultado procurado para $\ln 1,1$. Este

resultado, por sua vez, servirá como ponto de partida para o cálculo da raiz ou logaritmo de $1,2$, e assim sucessivamente se repetirá o processo para os números de 1 a 20 , construindo desta maneira uma tabela de logaritmos de base r .

Utilizando-se o mesmo algoritmo, calcularemos $\ln 1,1$, conforme **Quadro 3**.

Logo, $\ln 1,1 = 0,198071$.

ITERAÇÃO	X_K	$X_{K+1} = X_K - \frac{r^X - 1,2}{r^X \cdot \ln r}$
1	0,198071	0,386997
2	0,386997	0,378912
3	0,378912	0,378897
4	0,378897	0,378897

Quadro 4

Para determinar o logaritmo de $1,2$, vamos escolher como ponto inicial $x_0 = 0,198071$. Desta maneira temos, conforme **Quadro 4**.

Logo, $\ln 1,2 = 0,378897$, e assim sucessivamente se repete o processo para calcular o logaritmo dos números de $1,3$ a 20 . A seguir mostraremos uma tabela de logaritmos de base r conforme TABELA 2 - logaritmos de base r .

Conclusão

Desde a invenção dos logaritmos naturais por Napier (1614), dos logaritmos decimais por Briggs (1617) e do sistema apresentado por Bürgi (1620), com a finalidade de ajudar na simplificação dos complexos e laboriosos cálculos matemáticos

realizados no comércio, na astronomia ou na navegação, esses processos tornaram-se, de imediato, um grande sucesso e, a partir de então, monopolizaram essa importante área da Matemática até os dias atuais.

Com o surgimento das calculadoras eletrônicas e dos computadores, as tabelas logarítmicas se tornaram obsoletas e desnecessárias. A teoria de logaritmos ainda é uma ferramenta de muita utilidade, tanto na Matemática como em outras ciências; contudo, a pesquisa para a elaboração de outros sistemas de logaritmos foi deixada de lado talvez pela falta de interesse no assunto.

Os sistemas desenvolvidos neste trabalho utilizam dois números muito conhecidos desde épocas remotas, como bases. Poderão ser considerados

N	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.0000	0.1981	0.3789	0.5452	0.6992	0.8426	0.9768	1.1027	1.2215	1.3339
2	1.4405	1.5419	1.6386	1.7309	1.8194	1.9042	1.9857	2.0642	2.1397	2.2127
3	2.2831	2.3513	2.4172	2.4812	2.5432	2.6035	2.6620	2.7189	2.7744	2.8284
4	2.8810	2.9323	2.9824	3.0313	3.0790	3.1257	3.1714	3.2161	3.2599	3.3027
5	3.3447	3.3859	3.4262	3.4658	3.5046	3.5428	3.5802	3.6170	3.6531	3.6887
6	3.7236	3.7579	3.7917	3.8250	3.8577	3.8899	3.9217	3.9529	3.9837	4.0140
7	4.0439	4.0734	4.1025	4.1312	4.1594	4.1873	4.2149	4.2420	4.2688	4.2953
8	4.3214	4.3473	4.3728	4.3980	4.4228	4.4474	4.4717	4.4958	4.5195	4.5430
9	4.5662	4.5892	4.6119	4.6344	4.6566	4.6786	4.7003	4.7219	4.7432	4.7643
10	4.7852	4.8059	4.8263	4.8466	4.8667	4.8866	4.9063	4.9258	4.9451	4.9643
11	4.9833	5.0021	5.0207	5.0392	5.0575	5.0756	5.0936	5.1115	5.1291	5.1467
12	5.1641	5.1813	5.1984	5.2154	5.2322	5.2489	5.2655	5.2819	5.2982	5.3144
13	5.3304	5.3463	5.3621	5.3778	5.3934	5.4089	5.4242	5.4394	5.4545	5.4695
14	5.4844	5.4992	5.5139	5.5285	5.5430	5.5574	5.5716	5.5858	5.5999	5.6139
15	5.6278	5.6416	5.6553	5.6690	5.6825	5.6960	5.7093	5.7226	5.7358	5.7489
16	5.7619	5.7749	5.7877	5.8005	5.8132	5.8259	5.8384	5.8509	5.8633	5.8757
17	5.8879	5.9001	5.9122	5.9243	5.9363	5.9482	5.9600	5.9718	5.9835	5.9951
18	6.0067	6.0182	6.0297	6.0411	6.0524	6.0636	6.0748	6.0860	6.0971	6.1081
19	6.1191	6.1300	6.1408	6.1516	6.1624	6.1730	6.1837	6.1943	6.2048	6.2152
20	6.2257	6.2360	6.2463	6.2566	6.2668	6.2770	6.2871	6.2972	6.3072	6.3171

Tabela 2

Comparação entre os sistemas de logaritmos

N \	BASE: 1,6180	2,718281	3,141592	10
1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	1.440483	0.693147	0.605512	0.301030
3	2.283112	1.098612	0.959713	0.477121
4	2.880966	1.386294	1.211023	0.602060
5	3.344698	1.609438	1.405954	0.698970
6	3.723595	1.791759	1.565225	0.778151
7	4.043947	1.945910	1.699886	0.845098
8	4.321450	2.079442	1.816535	0.903090
9	4.566223	2.197225	1.919426	0.954242
10	4.785181	2.302585	2.011466	1.000000

Tabela 3

como uma miscelânea sobre a matéria em questão, porém, talvez no futuro também ajude a desenvolver outros ramos da Matemática ou a resolver problemas em outras áreas do conhecimento humano.

Ainda, para determinar o logaritmo de um

número em outros sistemas de bases diferentes aos conhecidos, pode-se utilizar o artifício de mudança de base. Mas, o objetivo do trabalho consiste em procurar diversas alternativas que nos ajudem a calcular o logaritmo de um número através de outras estruturas matemáticas como as funções.

Bibliografia

01. BORATTO, Francisco. **Basic para engenheiros e cientistas**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos, 1984.
02. BOYER, Carl. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Blücher, 1998.
03. BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Matemática**. v. 1. Versão Beta. São Paulo: Moderna, 1995.
04. CARVALHO, Benjamin. **Desenho Geométrico**. 3. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1985.
05. GENTIL; Nelson et. al. **Matemática para o segundo grau**. v. 1. 7. ed. São Paulo: Ática, 1998.
06. GIOVANNI, José; BONJORNO, José. **Matemática**. 2º Grau, v. 1. São Paulo: FTD, 1992.
07. MARMO, Carlos; MARMO, Nicolau. **Desenho geométrico**. v. 2. São Paulo: Scipione, 1995.
08. RUGGIERO, Márcia; LOPES, Vera. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Makron, 1996.
09. SWOKOWSKI, Earl. **Cálculo com geometria analítica**. v.1. São Paulo: McGraw-Hill, 1983.