UNIPAR
UNIVERSIDADE PARANAENSE

UM TESTE DE NÃO PRIMALIDADE EM TRÊS ATOS

Recebido em: 06/04/2024
Aceito em: 23/02/2026
DOI: 10.25110/educere.v26i1.2026-11107

Gabriel Di Angelo Ferreira [1]
Jamur Andre Venturin [2]
Duelci Aparrecido de Freitas Vaz [3]

RESUMO: O artigo tem por objetivo mostrar o movimento de elaboração de um Teste de não Primalidade, que verifica se um número natural é primo ou não, evidenciando como acontecem o pensamento inventivo, a sistematização e o raciocínio articulador ao criar e demonstrar o teste. Neste sentido, tematizou-se como surgiram as ideias em torno do crivo, entendidas como evidências do pensamento inventivo; ainda, como elas foram organizadas e sistematizadas do ponto de vista da Matemática; e, por fim, como o raciocínio articulador foi mobilizado na demonstração do teste. Para realizar a tarefa, assumiu-se o referencial teórico-metodológico, concernentes à Teoria dos Números; a determinação de relações algébrico-geométricas, manifestadas, respectivamente, com recursos geométricos (visuais) e recursos simbólicos; somado a isso, empregou-se na demonstração do Teste o método axiomático. Como resultado, evidenciou-se um crivo que permite verificar a primalidade de um número natural e, ainda, uma perspectiva do *modus operandi* que pode ser praticado pelo matemático ao elaborar e demonstrar proposições, entendendo que as ideias iniciais apresentadas em diferentes linguagens, a sistematização e o raciocínio articulador fazem parte do processo de desenvolvimento de Matemática.
PALAVRAS-CHAVE: Teste de não primalidade; Método axiomático; Pensamento inventivo; Sistematização; Raciocínio articulador.

A TEST OF NON-PRIMALITY IN THREE ACTS

ABSTRACT: The article aims to show the movement of elaboration of a non-primality test, which verifies if a natural number is prime or not, showing how inventive thinking, systematization and articulating reasoning happen when creating and demonstrating the test. In this sense, it was thematized how the ideas around the sieve emerged, understood as evidence of inventive thinking; yet, how they were organized and systematized from the point of view of Mathematics; and, finally, how the articulating reasoning was mobilized in the Test demonstration. To carry out the task, the theoretical-methodological

---

[1] Especialista em Educação Matemática pela UFT, Araguaína, TO. Professor estadual da Educação Básica, Araguaína, TO.
E-mail: gadianferreira@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8204-3028
[2] Doutor em Educação Matemática pela Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, SP. Professor do Curso de Licenciatura em Matemática da UFNT, Araguaína, TO.
E-mail: jamur.venturin@ufnt.edu.br, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0840-3651
[3] Doutor em Educação Matemática pela Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, SP. Professor da Pontifícia Universidade Católica de Goiás e do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.
E-mail: duelci.vaz@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5769-634X

framework was assumed, concerning the Theory of Numbers; the determination of algebraic-geometric relationships, manifested, respectively, with geometric (visual) and symbolic resources; in addition to this, the axiomatic method was used in the demonstration of the test. As a result, a sieve was evidenced that allows to verify the primality of a natural number and, still, a perspective of the modus operandi that can be practiced by the mathematician when elaborating and demonstrating propositions, understanding that the initial ideas presented in different languages, the systematization and articulating reasoning are part of the mathematics development process.
KEYWORDS: Non-primality test; Axiomatic method; Inventive thinking; Systematization; Articulating reasoning.

UNA PRUEBA DE NO PRIMALIDAD EN TRES ACTOS

RESUMEN: El artículo tiene por objetivo, mostrar el movimiento de la elaboración de una prueba de no primalidad que verifica si un número natural es primo o no, evidenciando como suceden el pensamiento inventivo, la sistematización y el raciocinio articulador, al criar y demostrar la prueba. En este sentido, se trató, como surgieron las ideas en torno de lo filtro, comprendidas como evidencias del pensamiento inventivo; aún, como ellas fueron organizadas y sistematizadas del punto de vista de la Matemática, y por fin, como el raciocinio articulador fue movilizado en la demostración de la Prueba. Para realizar la tarea, se asumió el referencial teórico-metodológico, concerniente a la teoría de los números; a la determinación de relaciones algebraicas-geométricas (visuales) y a los recursos simbólicos, bien como el método axiomático. Como resultado, se evidenció un filtro, que permite verificar la Primalidad de un número natural y aún una perspectiva del modus operandi que puede ser practicado por el matemático al elaborar y demostrar propuestas, entendiendo que las ideas presentadas, al inicio, en lenguajes diferentes, la sistematización y el raciocinio articulador, hacen parte del proceso de desarrollo de la Matemática.
PALABRAS CLAVE: Prueba de no primalidad; Método axiomático; Pensamiento inventivo; Sistematización; Raciocinio articulador.

1. INTRODUÇÃO

O crivo de Erastóstenes é um resultado matemático conhecido pelas pessoas que lidam com o tema primalidade de um número. Devido a sua importância e simplicidade, é um conteúdo disponível nos livros de matemática da Educação Básica e, somado a isso, é de fácil aplicação como um algoritmo que permite eliminar os números que não são primos, gerando uma lista de números naturais primos, a partir do número dois.

Outro resultado importante, na História da Matemática dos números primos, é atestado pela proposição XX, do livro IX, de Os Elementos de Euclides, tratando da infinidade de números primos (Boyer, 1996). Além dessa famosa proposição, Euclides enunciou e demonstrou outras proposições relacionadas aos números primos e a outros tipos de números naturais. Nessa direção, destaca-se a proposição 32, do livro VII, que

UNIPAR
UNIVERSIDADE PARANAENSE

diz: "*todo número ou é primo ou é medido por algum número primo*" (Euclides, 2019, p. 292, grifo do autor). Modernamente, está sendo dito que: "*todo número ou é primo ou é divisível por algum número primo*" (Gonçalves, 2005, p. 8, grifo do autor).

Assim como Erastóstenes estabeleceu um crivo para gerar números primos, matemáticos como Fermat, Legendre, Euler, Gauss e Riemann, entre outros, não mediram esforços para apresentar uma listagem ou resultados que expressassem aspectos sobre a distribuição e propriedades dos números primos (Santos, 2009). Consequentemente, os matemáticos que trabalharam com a Teoria dos Números deixaram como herança a árdua missão de determinar uma expressão que permitisse listar uma família de números primos ou uma "fórmula" que expresse todos os números primos. Nessa direção, é importante destacar a popular hipótese de Riemann que visa analisar a distribuição e compreender o comportamento dos números primos (Santos, 2009), bem como a conjectura de Goldbach que afirma: todo número inteiro par, maior do que 2, é obtido com a soma de dois números primos. Até o tempo presente, essa conjectura permanece sem demonstração. Destaca-se ainda, o problema apontado por Courant e Robbins (2000) que conjectura a ocorrência de números primos da forma p e p+2, isto é, distribuídos na forma 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13 e por aí vai.

Essas ideias revelam o quão instigante é o desafio de os matemáticos conhecerem e dominarem, amplamente, o que se pondera sobre os números primos. Nesta direção, bem como com as experiências em torno de Álgebra e de Geometria, registra-se que o pontapé a impulsionar a criação do teste de não primalidade[4] foi o desafio de "visualizar" ou, ao menos, a tentativa de observar se haveria um padrão de apresentação para os números primos no conjunto dos números naturais; o teste não é uma fórmula que possibilita listar, determinadamente, os números primos; entretanto, como o próprio nome diz, a ideia é analisar números candidatos à primalidade, testando um a um e descartando os que não forem primos.

Dadas essas informações, o objetivo do trabalho é mostrar o movimento de elaboração de um teste de não primalidade, evidenciando como acontecem o pensamento inventivo, a sistematização e a demonstração de uma proposição matemática. Dito de

[4] Em algumas ocasiões, mencionamos apenas como "teste". Destaca-se a existência de outros crivos que dizem da primalidade de números, entre eles o Teste de Fermat, o Teste de Solovay-Strassen, o Teste de Miller-Rabin, o Teste de Adleman-Huang, o Teste AKS e o Teste de Frobenius Quadrático Simplificado (RIBEIRO, 2013).

outro modo, mostrar-se-á como ocorrem: o pensamento inventivo, originado ao explicitar uma ideia na forma de uma proposição; a sistematização, ao descrever o modo pelo qual as ideias para a elaboração do Teste de não primalidadesão organizadas em uma ordem lógica; e, por fim, o raciocínio articulador, empregado na demonstração do Teorema, que anuncia o teste. Dada a natureza da investigação e proposta do artigo, os resultados e as demonstrações realizadas são dissertadas pormenorizadamente.

2. FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

A base teórica das ideias tratadas neste texto sustenta-se em Bicudo (1998), Plumpton, Shipton e Perry (1984), Keller e Bastos (2001), Husserl (2012), Costa (2008), Alencar Filho (1981). Para Bicudo (1998), a Matemática está estruturada de um ponto de vista axiomático, a dizer, no campo da Matemática existem as proposições não demonstráveis, entendidas como axiomas; as demonstráveis, conhecidas como teoremas e proposições; os elementos primitivos, nomeados por conceitos não derivados, ou não definidos; e as definições ou conceitos derivados, elaboradas a partir daqueles últimos. Esta organização da matemática mostra-se em livros, artigos e publicações, que tem como fonte a Matemática da perspectiva formalista, em que os resultados são entendidos como consequências do sistema axiomático (Costa, 2008).

Tendo em vista o modo pelo qual Euclides organizou parte da produção Matemática disponível em sua época, disponibilizada na obra Os Elementos, é possível identificar o método axiomático praticado por ele como uma tradição histórica que perdura até os dias atuais. Mesmo que a obra apresente problemas lógicos, ela serviu como fonte primária para a edificação da escola formalista. De acordo com Costa (2008), os problemas lógicos foram superados em séculos posteriores, pela escola matemática de Hilbert.

Posto isso, volta-se a atenção para o que dizem Plumpton, Shipton e Perry (1984) sobre o processo de evidenciação de uma proposição. Para esses autores, o matemático apreende intuitivamente que uma proposição poderia ser verdadeira. Porém, tal evidência só poderia ser garantida como verdadeira se for submetida ao julgamento da prova matemática. Dito mais claramente, em um primeiro momento manifesta-se uma ideia que foi sendo gerada na medida em que se reflete sobre os elementos matemáticos que circundam a ideia e, em consequência, o pensamento inventivo praticado pelo investigador. Os autores supracitados asserem que a demonstração teria o propósito de comprovar se o ato de evidência, o que foi apreendido em um primeiro momento, seria verdadeiro ou não; ou seja, a demonstração garante a validade lógica de uma proposição, eliminando qualquer tipo de pseudo evidência.

Plumpton, Shipton e Perry (1984) mencionam que o fundamento teórico da demonstração em matemática se sustenta no argumento lógico, isto é: firma-se a partir de uma hipótese verdadeira (premissas verdadeiras), uma conclusão verdadeira – uma conclusão óbvia; quer dizer que o raciocínio articulador, neste caso, demonstrativo acontece com a inferência de uma consequência, levando em conta premissas aceitas como antecedentes, e o consequente entendido como a conclusão (Keller; Bastos, 2001). Este tipo de ação é caracterizado como argumento lógico dedutivo, pois evidencia a objetividade ideal que se define "[...] por condições lógicas e a verdade do raciocínio (a sua não contradição) *impõem-se* quer ao matemático, quer ao lógico. O raciocínio verdadeiro é universalmente válido, o raciocínio falso é viciado pela subjectividade, portanto intransmissível" (Lyotardt, 1986, p. 17, grifo do autor), daí a necessidade de demonstrar o que foi evidenciado e escrito na forma de uma proposição.

Outro elemento teórico que comparece no ato de produzir Matemática, é quando as definições e as proposições são mobilizadas e apresentadas em uma sequência lógica, requerida em um campo teórico, conforme atesta Bicudo (1998) sobre organização estrutural da Matemática. Tal atitude é caracterizada como o processo de sistematização das ideias matemáticas e são entendidas como "[...] a construção operativa de configurações de ideias a partir de ideias dadas" (Husserl, 2012, p. 289). Com esse movimento, em consequência, pode-se inferir a importância e o significado de uma ideia (proposição provada como verdadeira) ao ser comparada com outros resultados já garantidos como verdadeiros e, portanto, aceitos em um campo teórico.

Levando-se em conta o modo como a Matemática está estruturada e, ainda, a explicitação dos autores supracitados, considera-se a Teoria dos Números como um ramo da Matemática Pura que visa estudar e demonstrar problemas/generalizações que estejam relacionados a propriedades numéricas, em especial, as propriedades de números inteiros haja vista que as generalizações neste conjunto podem ser estendidas para os demais, ajudando assim, no processo demonstrativo. Tendo em vista a Teoria dos Números, neste artigo, considerou-se as propriedades de divisibilidade e de fatoração tanto para dizer de perímetro e de área dos quadriláteros, quadrado e retângulo, quanto os elementos conceituais necessários para demonstrar a veracidade do teste de não primalidade.

2.1 Um Teste de não Primalidade

Diante do exposto, indaga-se: em que consiste o Teste de não primalidade? Para responder a pergunta e, assim, destacar a problemática do trabalho, apresenta-se a alegoria da peneira: em um monte de areia há grãos de areia e outras impurezas como, por exemplo, pedras: o monte de areia representa o conjunto dos números naturais, isto é, cada grão de areia estaria associado a um número composto; por fim, as impurezas da areia, no caso, as pedras, correspondem aos números primos. Em geral, quando um pedreiro quer separar as impurezas da areia, ele usa uma peneira que, dependendo dos espaços entre os fios de arame, torna possível peneirar ou retirar as impurezas da areia, consoante a necessidade estabelecida. O teste de não primalidaderepresenta a peneira de que o trabalhador se vale para separar a areia das pedras. No ato de "peneirar", todos os grãos que passam pela peneira são números compostos, já os que ficam nela, reprovados no teste, formam os números primos.

Assim, as pedras que permanecem na peneira são os números reprovados no teste. Uma pedra não passa na peneira a não ser que os espaços entre os fios de arame não estejam estreitos o suficiente. Como determinar uma peneira com um calibre preciso entre os fios de arame? O que garantirá que a "peneira" ou o teste, cumpra, efetivamente, o seu propósito? A resposta da primeira indagação assenta-se no processo inventivo, ao estabelecer correspondências entre Álgebra e Geometria, gerando proposições, definições e lemas, determinando assim uma fórmula que analisa os números naturais candidatos a números primos ou não; a da segunda indagação corresponde ao núcleo do ofício do matemático, a dizer, a demonstração. Demonstrar uma proposição garante a veracidade e a objetividade, estabelecendo, rigorosamente, sua abrangência, delimitando as fronteiras da proposição e, inclusive, as possíveis interseções ou consequências teóricas do que está sendo mostrado.

Com a finalidade de clarear o que foi dito, apresenta-se o teste de não primalidade, exemplificando como testar um número natural candidato a primo ou não.

O crivo consiste em encontrar soluções "x" e "n" naturais da equação $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$, em que k é o número candidato à primalidade. Para tanto, analisa-se a variável n e, ao determinar o seu valor, explicita-se um valor para "x" e, assim, pode-se dizer se k é primo ou não.

Na igualdade $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$, se $n = k - 1$, obtêm-se sempre $x = 1$, soluções naturais para esta igualdade, designadas como solução clássica[5] que vale para todos os números naturais primos ou não. No entanto, tal solução é única para os números primos; no caso dos compostos, é uma "das" soluções que fazem a igualdade $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$ manter-se para valores de "x" e "n" naturais. Nesse sentido, na elaboração do *Teste*, excluiu-se o valor de $n = k - 1$, isto é, caso seja possível determinar outro valor de "n" (e, consequentemente, de "x") que faça a igualdade $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$ manter-se, o número k que está sendo testado é um número composto; no entanto, caso não seja possível encontrar outro valor de "n", diferente de $k - 1$, então o número k é primo[6].

O teste é aplicado para números ímpares (com exceção do número 1), pois os números pares possuem o número 2 como seu divisor. Desta forma, como k é ímpar, sendo $k = x \cdot (x + n)$, tem-se que x é ímpar; e, consequentemente, n é par[7]. Dito isso, analisemos o número $k = 27$, candidato a primo ou não[8].

Assim, como "n" é par e menor que $k - 1$, seus possíveis valores são: 2, 4, 6, ..., 24, indaga-se: sendo $k = 27$, então um destes possíveis valores de "n" poderia fazer a raiz $\sqrt{4k + n^2}$ possuir um valor natural para que se mantenha a igualdade $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$? Se existir tal número, 27 não será um número primo; caso contrário, 27 seria um número primo. A tabela 1 apresenta os valores de "n" e $k = 27$, substituídos em $\sqrt{4k + n^2}$.

Tabela 1[9]: Teste do número 27

$n = 2$	$\sqrt{4 \cdot 27 + 2^2} = \sqrt{112} \cong 10.58$
$n = 4$	$\sqrt{4 \cdot 27 + 4^2} = \sqrt{124} \cong 11.14$
$n = 6$	$\sqrt{4 \cdot 27 + 6^2} = \sqrt{144} = 12$

Fonte: elaborado pelos autores

[5] Considera-se apenas o valor positivo da raiz $\sqrt{4k + n^2}$.
[6] Nas próximas seções, descreve-se os detalhes que impulsionaram a constituição do Teste.
[7] Na quinta ideia chave, pormenoriza-se o modo pelo qual a igualdade foi encontrada.
[8] Decidiu-se antecipar a exposição da aplicação do Teste, para verificar se um número é primo ou não, com a finalidade de exemplificar os conceitos apresentados no decorrer do texto.
[9] Não é necessário construir uma tabela com todos os valores de "n" e, assim, procurar os casos em que serão obtidos valores naturais para a raiz positiva $\sqrt{4k + n^2}$, precisa-se encontrar apenas o primeiro valor de "n" que faz $\sqrt{4k + n^2}$ ser um número natural.

De acordo com a tabela 1, $n = 6$ faz a $\sqrt{4k+n^2}$ ter um resultado natural. Sabendo disso, substitui-se os valores de "k" e "n" em $2x + n = \sqrt{4k+n^2}$e encontra-se x; posteriormente, os divisores de k, substituindo "x" e "n" em $k = x \cdot (x+n)$.

Assim procedendo, obtém-se: $2x + 6 = \sqrt{108+6^2} \Rightarrow 2x + 6 = 12 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$. Deste modo, afirma-se que 27 não é primo, pois: $27 = 3 \cdot (3+6)$, ou a, $27 = 3 \cdot (9)$.

3. APLICAÇÃO DO MÉTODO MATEMÁTICO NA DETERMINAÇÃO DO TESTE DE NÃO PRIMALIDADE

Esse tópico tem a finalidade de descrever a ideias que geraram o teste, indicando como elas foram sendo escritas em linguagem geométrica (recurso visual) e em linguagem algébrica (recurso simbólico) para que fosse possível registrar aspectos do pensamento inventivo e, sobretudo, em outra fase, sistematizar as ideias como elementos matemáticos, apresentando-as em termos de definições e de proposições para que o teste pudesse, assim, ser provado com o método axiomático (ver tópico 4). Portanto, esse capítulo metodológico converge com o teórico, tendo em vista que já se anunciou o modo pelo qual a Matemática está estruturada.

No tópico 3.1, explicita-se o movimento do pensamento inventivo, isto é, anunciam-se as ideias chave que se manifestaram intuitivamente e deram origem ao teste. Essa fase revela "[...] a operação idealizadora e as ideias que nela se podem gerar e identificar exatamente como configurações espirituais com base nas multiplicidades da aparição que podem oscilar na relatividade" (Husserl, 2012, p. 289). As configurações espirituais dizem do espírito inventivo e relevam ideias apreendidas, aqui nomeadas como ideias chave.

A primeira ideia diz da representação de um número como área de uma figura geométrica[10]; a segunda ideia refere-se a um número representado como a área de um quadrado; a terceira ideia anuncia a igualdade do quadrado e sua relação com um número quadrado perfeito e com uma operação algébrica; a quarta ideia trata da representação de um número como a área de um retângulo; na quinta ideia, pondera-se que todo número natural, não importando se é primo ou não, possa ser representado, no mínimo, de uma maneira como a área de um retângulo.

---

[10] É uma expressão geral sobre o número k, escrita como uma multiplicação. Ao aplicar a fórmula resolutiva da equação do 2º grau nesta expressão, obtém-se a Lei Fundamental do Teste, que é: $2x + n = \sqrt{4k+n^2}$.

Na seção 3.2, explicita-se o modo pelo qual os elementos matemáticos, que fizeram parte do pensamento inventivo, foram sistematizados de acordo com a organização lógica da Matemática, conforme diz Bicudo (1998). Nesta direção, argumenta-se o motivo pelo qual as ideias chave tornaram-se definições, proposições ou lemas; explicita-se ainda, as ideias do teste e a sua representação como uma sentença matemática.

Na seção 4, demonstra-se o teste, garantindo assim a abrangência, a veracidade e a objetividade e, em consequência, a sua idealidade – tornando-se um objeto matemático que pode perdurar na historicidade da Matemática e ser compreensível por outrem.

3.1 O Pensamento Inventivo e o Teste

Os números primos possuem apenas dois divisores, eles são necessários para a decomposição dos números compostos. O número 6, por exemplo, é um número composto, pois possui quatro divisores naturais (1, 2, 3 e 6). Este número pode ser representado pela multiplicação de duas maneiras distintas: $6 = 2 \cdot 3$ e $6 = 1 \cdot 6$ Deste modo, quando um número é composto, significa dizer que ele pode ser representado pelo menos de duas maneiras, envolvendo a multiplicação. Por outro lado, os números primos possuem uma única representação por meio da multiplicação: a unidade pelo número primo. O fato de um número ser primo ou composto está, intimamente, relacionado com as maneiras que este pode ser representado com a multiplicação de outros números naturais. Torna-se imediato que se um número, gerado pela multiplicação de outros números, pode ser representado por mais de uma maneira, envolvendo a multiplicação, ele será um número composto, caso contrário é primo. Aqui entra em cena o teste que torna possível determinar os números que foram multiplicados e geraram um terceiro, que pode ser um número primo ou composto. A seguir, lista-se as ideias chave que constituíram o crivo.

Primeira ideia chave – as análises efetuadas com os números naturais e com as figuras geométricas geraram a ideia de representar um número como área de uma figura geométrica, associando Álgebra com Geometria por meio das propriedades a área e o semiperímetro e, inclusive, relacionando-as com a ideia de divisibilidade de números naturais.

Para a elaboração do teste, levou-se em conta que os números primos estão, diretamente, relacionados com a decomposição e com a multiplicação de números.

Consciente destas características foram constituídas relações que as abrangessem, em especial, a multiplicação que, em certas circunstâncias, está relacionada com a divisibilidade de números. Pensando nisso, foram elaborados modos de representar a multiplicação, não somente com o aspecto algébrico, mas inclusive com modos correspondentes à Geometria. Desta maneira, a intencionalidade, aqui entendida como a apreensão da ideia de relacionar Álgebra com Geometria, permitiu analisar as propriedades dos números como, a divisibilidade. Esta articulação gerou as ideias centrais do teste, a saber: representar o número como a área de uma figura geométrica e analisar suas características básicas como, a divisibilidade. Com isso, torna-se possível afirmar se o número representado como a área de uma figura geométrica, é primo ou não.

A articulação aqui estabelecida entre Álgebra e Geometria, de certo modo, não seguiu estritamente o mesmo fluxo das orientações analíticas atuais herdades de Descartes em que o traçado geométrico de um ponto no plano, por exemplo, é uma particularidade, portanto, é secundária em relação a possibilidade de expressá-lo por uma coordenada A (x, y) que pode designar qualquer ponto no plano (Ales Bello, 2004). Com esse modo de operar inaugurou-se a Geometria Analítica e, assim, a linguagem algébrica desconecta as proposições dos traçados geométricos. Destaca-se que, nesta investigação, o traçado geométrico está em consonância com o pensar matemático, isto é: na medida em que proposições foram geradas de modo abstrato, fez-se o uso do traçado geométrico para expressar o intuído, e ao analisá-lo, formularam-se ideias, organizaram-se proposições.

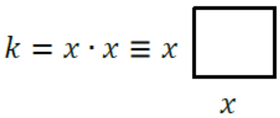
Nesta direção, isto é, sobre a representação de um número como a área de uma figura geométrica, Ferreira (2018, p. 57) destaca que "[...] os números podem ser representados como a área de uma figura, não uma figura qualquer, que simplesmente dê o valor desse número, mas sim uma figura que preze algumas propriedades geométricas, como área e [semiperímetro]".

A representação de um número qualquer como a área de uma figura, por si só, não garante que ele seja primo ou não. Para esta afirmação ser avaliada como verdadeira, deve-se levar em conta que o resultado da decomposição do número, gere números que sejam associados como lados de uma figura geométrica, cujo valor de sua área represente o número decomposto. Dessa forma, é possível analisar a primalidade ou não deste número.

As relações entre área e semiperímetro de figuras geométricas e a ideia de representar um número como a área dessas figuras em função de seus divisores, além de facilitar a análise de propriedades numéricas como a divisibilidade, foram indispensáveis na construção de outras relações, proporcionando compreender que seria possível criar um crivo para verificar a primalidade ou não de um número.

Segunda ideia chave – dada a primeira ideia chave, interpretou-se, consequentemente, que um número pode ser representado como a área de um quadrado. Para analisar se um número é primo ou não, destacou-se a ideia de representar este número natural como a área de um quadrado, de tal modo que os lados dessa figura sejam os divisores do número. Esta representação não é o teste, mas sim uma ideia que visa a descobrir a quantidade de divisores que o número expresso como a área de um quadrado possui. Ao determinar a quantidade de divisores, imediatamente, afirma-se se o número é primo ou não. Com efeito: a representação de um número natural k, maior do 1, e a realização do cálculo de sua área, dada a definição de números primos, também, conduz a ponderar que o número representado não é primo (ver Figura 1).

Figura 1: representação de um número k como área de um quadrado



Fonte: elaborada pelos autores

Terceira ideia chave – exemplo sobre uma relação constituída, a partir da representação de um número natural, como a área de um quadrado, ocorre na expressão $x^2 = 4 \cdot (x-1) + (x-2)^2$, nomeada como *Igualdade do quadrado.* Esta Igualdade manifestou-se, em um primeiro momento, sem nenhuma relação com a Geometria, nem mesmo com a ideia inicial do teste (que é a representação de um número como área de uma figura e a análise de sua divisibilidade, consequentemente, da primalidade ou não); mas, posteriormente, ao manipular, algebricamente, a igualdade $x^2 = 4 \cdot (x-1) + (x-2)^2$ e, ao substituir x, por $x + 1$, encontrou-se $(x+1)^2$ do lado esquerdo da expressão que foi associada, imediatamente, ao semiperímetro de um *retângulo*, que expressava um número um número primo como sua área. O desdobramento do que fora descrito, deu origem à quarta ideia chave que diz da *representação de um número como* *a área de um retângulo* – que é fundamental[11] para a elaboração e para a demonstração do teste de não primalidade. Em síntese: a *Igualdade do quadrado* possibilitou escrever um número quadrado perfeito como uma operação algébrica, representada de modos distintos para a demonstração do crivo.

A *Igualdade do quadrado* demonstrável para todo número real x, diz que que um número real pode ser escrito como: $x^2 = 4 \cdot (x-1) + (x-2)^2$. A seguir, expõe-se dois exemplos numéricos acerca desta relação.

Tabela 2: Igualdade do quadrado para os números 3 e 5

Para $x = 3$	Para $x = 5$
$3^2 = 4 \cdot (3-1) + (3-2)^2$	$5^2 = 4 \cdot (5-1) + (5-2)^2$
$3^2 = 4 \cdot (2) + (1)^2$	$5^2 = 4 \cdot (4) + (3)^2$
$3^2 = 8 + 1$	$5^2 = 16 + 9$
$3^2 = 9$	$5^2 = 25$

Fonte: elaborado pelos autores

A ideia de representar um número k como a área de um quadrado, evidenciou a compreensão de que os números quadrados perfeitos são compostos, isto é: *todo número natural que é quadrado perfeito pode ser representado como a área de um quadrado*. Reorganizando esta expressão, tem-se: seja k um número quadrado perfeito e, ainda, a área do quadrado de lado l, seja l^2. Quer dizer que, todos os quadrados perfeitos k são da forma l^2. A partir disso, ao realizar a igualdade entre k e l^2, e ao aplicar a operação de divisão, encontra-se $l = \frac{k}{l}$. Ou seja: k é divisível por l. A definição de número primo assere que número primo é todo número natural que possui, apenas, dois divisores naturais, a saber, o número um e ele mesmo. Quer dizer, a igualdade $l = \frac{k}{l}$ garante a justificativa de o porquê de todo número quadrado perfeito não ser primo, uma vez que k, além de possuir dois divisores é, ainda, divisor de l, o que contradiz a definição de número primo.

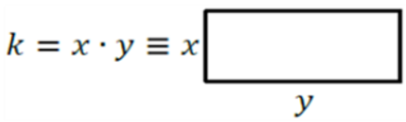
[11] Representar um número como a área de uma figura geométrica e relacionar a área desta figura com seu semiperímetro, permitiu ponderar sobre a divisibilidade numérica.

Quarta ideia chave – a ideia de *um número ser representado como a área de um retângulo* possibilitou associar a área do retângulo com seu semiperímetro e assim analisar a primalidade ou não desse número.

Exemplificando: o número 6 pode ser representado a partir das multiplicações $6 = 1 \cdot 6$ ou $6 = 2 \cdot 3$. Observa-se, por conseguinte, que essas representações do número 6, não podem ser relacionadas como a área de um quadrado, pois os números que expressam a medida dos lados são diferentes. Além do número 6, outros números (primos e compostos) não podem ser representados como a área de um quadrado, visto que são números obtidos pela multiplicação de números diferentes. Ao analisar essa situação, manifestou-se a ideia de *representar um número como a área de um retângulo*, visto que existem números que não podem ser obtidos como a multiplicação de números iguais, ou seja, l^2. Desta maneira, como o retângulo possui dois lados distintos, entende-se, assim, que seria possível abarcar estes números que não podem ser representados por l^2. A representação de um número como área de um retângulo auxiliou no processo de analisar a não primalidade de números que podem ser expressos pela multiplicação de dois números diferentes e foi fundamental para expressar, algebricamente, o teste de não primalidade, evidenciando a relação existente da área de um retângulo com seu semiperímetro, entendida como aspecto primordial do teste.

Levando em conta a natureza dos lados de um retângulo, é possível reescrever um número $k$como a multiplicação de números diferentes xe y, conforme Figura 2.

Figura 2: representação de um número k como a área de um retângulo

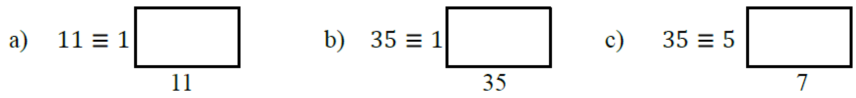


Fonte: elaborado pelos autores

Quinta ideia chave – *se o número é composto, ele pode ser representado, no mínimo, de dois modos distintos como a área de um retângulo, mas, caso este número seja primo, ele possui uma única representação associada à área de um retângulo.* Por exemplo, o número 8 pode ser representado como a área de um retângulo de lados medindo 1 e 8 unidades de comprimento (u.c) e, também, com 2 e 4 u.c. Já o número 5, possui uma única representação como área de um retângulo, isto é, com lados 1 e 5 u.c. Note que, o número 8 é composto e o 5, é primo.

Tendo em vista o que se anuncia na quinta ideia chave, o número 11 (que é primo) pode ser expresso apenas como a área de um retângulo de lados medindo 1 e 11 u.c. Já o número 35, pode ser expresso como a área de retângulos com os lados medindo 1 e 35 u.c e, com lados medindo 5 e 7 u.c. Abaixo, as representações geométricas dos números 11 e 35 como a área de retângulos (sem considerar as escalas dos lados das figuras).

Figura 3: representação de números como a área de retângulo

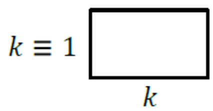


Fonte: elaborado pelos autores

Ao observar as representações da figura 3 (a) e (b), entende-se que tanto o número 11 quanto o 35, podem ser associados como área de retângulos com lados de medidas 1 e o próprio número que diz da área. Generalizando esta declaração, pode-se enunciar a proposição: *todo número natural k, não importando se é primo ou não, pode ser representado no mínimo de uma maneira como a área de um retângulo de* lados são 1 e k.

Para verificar esta declaração, far-se-á uma associação entre a representação multiplicativa de k, escrito como $k = 1 \cdot k$, com a representação de um número como a área de um retângulo. Considerar as medidas dos seus lados como 1 e k, verifica-se, imediatamente, a declaração acima.

Figura 4: representação do número k como a área de um retângulo

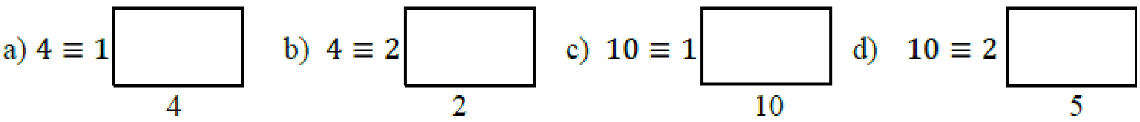


Fonte: elaborado pelos autores

As representações do número 35, como a área de retângulos, possuem a mesma área, mas presentam valores diferentes para o semiperímetro. Na primeira, o valor o semiperímetro é 36 u.c (ver figura 3 (b)); na segunda, o valor é 12 u.c (ver figura 3 (c)). Em síntese, o número 35 é composto e é representado, geometricamente, por mais de uma maneira. A primeira representação na figura 3 (a) e (b) são os casos clássicos em que o número natural k é obtido como $k = 1 \cdot k$, anteriormente, explicitado. Nestes casos, a multiplicação associada à área de um retângulo implica que o seu semiperímetro seja $k + 1$ u. c.

Nesta direção, os números primos só podem ser escritos como a multiplicação de dois números e, consequentemente, tem-se apenas uma representação geométrica como a área de um retângulo; ainda o valor do semiperímetro é a adição do número primo com o número 1. Ainda, quando o número natural não for primo, obtêm-se pelo menos duas representações geométricas com a figura geométrica retângulo $k = 1 \cdot k$ e $k = x \cdot y$. Tendo isso em vista, conjecturou-se: *se um número k não é primo e é associado à área de um retângulo, o valor do semiperímetro das possíveis representações de k como retângulo, com lados diferentes de k e 1, será menor do que a representação com os lados medindo k e 1.* A Figura 5, exemplifica o que diz a conjectura para casos de retângulos com áreas 4 e 10. O valor do semiperímetro das figuras 5 (b) e (d) é menor do que os da Figura 5 (a) e (c), respectivamente.

Figura 5: exemplificação da conjectura

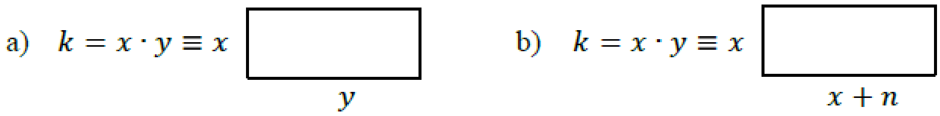


Fonte: elaborado pelos autores

Esta conjectura requer uma demonstração para dizer da generalidade do enunciado e de sua veracidade, conforme abaixo:

Todo número natural representado por k, primo ou não, é obtido pela multiplicação algébrica de dois números naturais, ou seja, da forma $k = x \cdot y$. Tomando $x \neq y$ torna-se possível representar k como a área de um retângulo de lados com medidas x e y. Tendo em vista que um retângulo possui um lado maior que o outro, é possível "fragmentar" o maior lado em função do menor, por exemplo: "y" como $y = x + n$, conforme Figura 6 (b), ou seja, representar $k = x \cdot y$ é equivalente a escrever $k = x \cdot (x + n)$, em que "n" (número natural) é incremento a "x" para compor o valor de "y".

Figura 6: retângulo e retângulo fragmentado



Fonte: elaborado pelos autores

Valendo-se da igualdade $k = x \cdot (x + n)$, o semiperímetro da Figura 6 (b), é $2x + n$. Aplicando a fórmula da equação do 2º grau na igualdade $k = x \cdot (x + n)$, determina-se: $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$ (1).

A igualdade (1) apresenta uma relação entre o semiperímetro e o valor de k; neste sentido, interpretou-se que o número, para ser composto ou primo, está relacionado com o comprimento do seu semiperímetro (do mesmo modo como explicitado nos comentários da Figura 5). Dadas essas informações, anuncia-se a conjectura em linguagem matemática, considerando o número k composto e o valor do semiperímetro do retângulo com área k, sendo $2x + n$.

Se o número k *não é primo e o semiperímetro (do retângulo com área* k*) é* $2x + n$*, então* $2x + n < k + 1$.

Ainda, ao descrer $2x + n < k + 1$, de tal modo que permaneça nesta desigualdade apenas a variável "x". Como $2x + n = x + (x + n)$, tem-se: $x + (x + n) < k + 1$. Como $\frac{k}{x} = (x + n)$, deduz-se a nova desigualdade que diz da tese: $x + \frac{k}{x} < k + 1$.

As alterações na desigualdade $2x + n < k + 1$, originam a proposição $x + \frac{k}{x} < k + 1$ que vale para todos os números compostos.

Demonstração:

$$\text{Como } \underbrace{x \vee k, x \neq 1, x \neq k \Rightarrow x < k}_{(i)}, \text{ e}$$

$$\underbrace{x \vee k, x \neq 1 \Longrightarrow x > 1 \Longrightarrow x - 1 > 0 \Longrightarrow \frac{x-1}{x} > 0.}_{(ii)}$$

Pormenoriza-se que $x \vee k, x \neq 1$ e $x \neq k$. Se $x < k$ em *(i)* é uma *inferência* realizada de acordo com a teoria da divisibilidade (Alencar Filho, 1981), ou seja, usou-se os critérios de divisibilidade, é notório que seria impossível k possuir um divisor "x" maior do que ele mesmo. Do mesmo modo em *(ii)*, dado que x é um número natural divisor do número k, deduz-se que: $x > 1$; e, ainda, $\frac{x-1}{x} > 0$ 0 por *consequência* de $x -$

$1 > 0$ possui inverso multiplicativo. Multiplicar $\frac{x-1}{x}$ em $x < k$. Com isso: $\underbrace{x - 1 < k - \frac{k}{x}}_{(iii)}$.

Em *(iii)*, adicionar $1 + \frac{k}{x}$; conclui-se: $x + \frac{k}{x} < k + 1$.

3.2 Pensamento Inventivo e sistematização do conhecimento Matemático

As ideias apresentadas na seção anterior, fornecem informações sobre um número natural ser primo ou não, mediante a multiplicação – de números diferentes ou iguais – associada às figuras geométricas – retângulo e quadrado. Estas ideias são consequências da relação estabelecida entre Álgebra e Geometria, quando se efetuou a correspondência das propriedades multiplicativas de números com as das figuras geométricas, surgindo assim a representação de *número como área de uma figura geométrica.*

Destaca-se que, a apreensão das ideias chave, necessárias para demonstrar e para construir o teste, manifestou-se na medida em que se pensava no processo de verificar a primalidade ou não de um número. Nesse sentido, os resultados provindos da Teoria dos Números mostraram-se entrelaçados com as ideias chave. No entanto, de acordo com o protocolo matemático, para apresentar ou para demonstrar uma afirmação, é necessário sistematizar as ideias, definindo os objetos e apresentando as proposições sobre eles, hierarquicamente. Neste sentido, o propósito desta seção é apresentar as *ideias chave* que se tornaram definição, proposição e lema, indo na direção do modo pelo qual a Matemática mostra-se organizada, como assinala Bicudo (1998, p. 306): "Ao desenvolver uma teoria, a missão do matemático é definir os conceitos da teoria e demonstrar as propriedades de tais conceitos".

Esta compreensão do ofício do matemático exigiu o estabelecer uma estrutura teórica com as ideias que se manifestaram. Assim, a primeira ideia chave foi nomeada como definição 1. Por que definição? Definir um objeto é dizer o que ele *é*, anunciando os entes matemáticos e, sobretudo, o modo pelo qual eles são articulados para, assim, caracterizar o objeto, isto é, na definição apresenta-se as qualidades do objeto matemático (Plumpton, Shipton e Perry, 1984). Por isso *representar um número como a área de uma figura geométrica é relacionar sua divisibilidade com a área e com o semiperímetro.* Desta forma, é possível dizer da primalidade ou não de um número, a partir da análise das propriedades semiperímetro e da área de uma figura geométrica que representa o número em questão.

Na sequência da exposição do pensamento inventivo, em consonância com a primeira ideia chave, nomeou-se como definição 2, a ideia que declara que *um número pode ser representado como a área de um quadrado*. Ou seja: *representar um número como a área de um quadrado é relacionar a divisibilidade com a área e com o semiperímetro do quadrado.* Nessa direção, é possível dizer da primalidade ou não de um número, a partir da análise do semiperímetro e da área do quadrado que representa o número em questão. Com a definição 2, foi possível responder questões sobre a primalidade ou não de alguns números naturais[12], que se validaram a partir de tentativas, envolvendo números primos e números compostos, proporcionando a compreensão da necessidade de ampliar a possibilidade de multiplicação de dois números, agora, com números diferentes, pois a figura analisada será o retângulo.

Decorrente das definições 1 e 2, a quarta ideia chave, que diz sobre *um número ser representado como a área de um retângulo* foi nomeada como definição 3. A ideia de representar um número como a área de um retângulo, gerou a compreensão de verificar a primalidade ou não de números, agora, obtidos com a multiplicação de *números diferentes*. Com este entendimento, a ideia da representação de um número como a área de um quadrado foi atualizada e, portanto, avançada com o uso do retângulo. Por isso, a quarta ideia chave é entendida como a força motriz para a elaboração do *Teste*, tendo em vista que foram ampliadas as possibilidades de testes de números naturais candidatos a números primos.

A terceira ideia chave, que diz da *Igualdade do quadrado*, teve como propósito auxiliar na demonstração do teste. Assim, $x^2 = 4(x-1) + (x-2)^2$ foi utilizada no crivo, tendo em vista o método indireto escolhido para a sua demonstração, quer dizer: a Igualdade do quadrado assemelha-se[13], algebricamente, com $(k+1)^2 = 4k + n^2$ construída em um dos passos realizados no processo demonstrativo, como explicitar-se-á adiante. Em consequência desta explicação, a terceira ideia chave foi nomeada como proposição 1, pois é uma assertiva verdadeira necessária para demonstrar o teste.

A quinta ideia chave nomeada, agora, como proposição 2, apresenta afirmações que tratam do retângulo, de sua área e de seu semiperímetro. Uma delas diz: *todo número natural k, não importando se é primo ou não, pode ser representado no mínimo de uma*

[12] Na seção 3, tematiza-se o motivo pelo qual a quarta ideia chave é fundamental.
[13] Ver a terceira ideia chave.

maneira como a área de um retângulo, *isto é,* $k \cdot 1$ *e o semiperímetro desta representação é* $k+1$ – como demonstrado na seção anterior. A aplicação da proposição 2 na demonstração do teste, foi motivada pelo uso do método indireto, visto que são conhecidas as afirmações sobre o semiperímetro de um número k, expresso como a área de um retângulo. Essas afirmações sobre o semiperímetro de números primos, expressos como área de retângulos, ajudaram a encontrar a contradição surgida ao negar a tese do Teorema. Dizer que a proposição 2 é verdadeira para *k* primo ou não, após a representação como a área de um retângulo, implica que o semiperímetro dessa representação valerá pelo menos $k+1$, pois k poderia ter outros divisores e, consequentemente, o seu semiperímetro, após a sua representação como área de um retângulo, teria outra medida.

Independente de k ser um número primo ou não, seus divisores são 1 e k. Neste sentido, o objetivo do teste não é determinar estes números, mas sim analisar um número natural, explicitando os outros divisores. Caso não seja possível encontrar esses números que multiplicados entre si, gere k, então ele será um número primo, pois a única solução que valerá para k é o caso $k = k \cdot 1$ que vale para todos os números[14].

Outro resultado decorrente da quinta ideia chave, foi anunciado como uma conjectura e, na ocasião, demonstrou-se sua veracidade, a saber: *se um número k não é primo e é associado à área de um retângulo, o valor do semiperímetro das possíveis representações de k expresso como retângulo, com lados diferentes de k e 1, será menor do que o da representação de k como retângulo com lados medindo k e 1.* Esta conjectura recebeu o nome de proposição 3 e foi usada para demonstrar a recíproca do teste, visto que o número $k$era composto; deste modo, bastava demonstrar que é possível determinar dois números diferentes de 1 e k, que multiplicados entre si, gere k, e assim o semiperímetro do retângulo é menor que $k+1$.

As proposições 1, 2 e 3 podem, inclusive, ser consideradas como lemas, na medida em que são afirmações necessárias para a demonstração do teste de não primalidade.

4. O RACIOCÍNIO ARTICULADOR E O TESTE DE NÃO PRIMALIDADE

Por que demonstrar? Segundo Plumpton, Shipton e Perry (1984), experimentos não garantem a prova de uma proposição, ou seja, mesmo que o proposicional atenda a

---

[14] Substituir$x = k + 1$ na Igualdade do quadrado, tem-se uma expressão semelhante a $(k+1)^2 = 4k + n^2$.

um número significativo de testes, ele deve ser demonstrado para que sua veracidade seja garantida e, por conseguinte, o que é enunciado atinja o alcance teórico. Daí a necessidade de demonstrar o teste, com o método axiomático dedutivo.

A expressão do crivo, como uma sentença matemática, a saber, $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$ surgiu a partir da igualdade $k = x \cdot (x + n)$ e da fórmula resolutiva de equações do 2º grau. Ou seja, encontrar os divisores de k, na expressão $k = x \cdot (x + n)$, é equivalente a encontrar soluções da igualdade $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$. Note que, na igualdade $k = x \cdot (x + n)$, o número k está em função de duas variáveis. Já, na segunda $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$, no lado direito, o radical está, unicamente, em função da variável n, isto é, a partir da relação existente entre as expressões $k = x \cdot (x + n)$ e $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$, é possível analisar a primalidade do número natural k, em função de uma só variável.

Considerando todos esses aspectos, a finalidade do teste é encontrar soluções naturais (de "x" e "n") na equação $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$, analisando especificamente o lado direito desta igualdade, que é dependente da variável "n". Desta forma, pode-se dizer se k é um número primo ou não.

Para a demonstração crivo, foi articulada a igualdade $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$ com resultados da Teoria dos Números, gerando o Teorema 1. Esta articulação foi realizada, tendo em vista que a igualdade supracitada está associada à representação de um número como a área de um retângulo.

Teorema 1: Seja $k = x \cdot (x + n) \in N$, para valores de $x, n \in N$que satisfazem a equação: $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$.Se existir, $n < k - 1 \in N$ tal $\sqrt{4k + n^2} \in N$, então k não é primo.

Supor que k seja primo nas condições estabelecidas na hipótese do Teorema 1, isto é, $n < k - 1 \in N$ tal $\sqrt{4k + n^2} \in N$. De acordo com a proposição 2, sendo k primo e representando-o como a área de um retângulo, a medida de seu semiperímetro[15] é $2x + n$, ou ainda, vale $k + 1$. Pela hipótese, $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$, e, sabendo agora que $2x + n = k + 1$, tem-se:

$$k + 1 = \sqrt{4k + n^2} \Longrightarrow (k + 1)^2 = 4k + n^2 \ (1)$$

[15] As proposições 1 e 2, foram utilizadas para demonstrar ($\Longrightarrow$) do Teorema.

Observa-se que, para k primo, pela proposição 1, necessariamente, n deve ser igual a $k-1$. Mas, será que o valor de $n < k-1$ pode ocorrer nas condições definidas pelo Teorema 1? A resposta é não, pois encontrar-se-ia um resultado impossível para designar o semiperímetro de um retângulo, representando um número primo. Na continuidade, mostrar-se-á por que n não pode ser menor que $k-1$, para k primo.

Desenvolvendo (1) e isolando n, tem-se: $(k+1)^2 = 4k + n^2 \Longrightarrow n^2 = (k+1)^2 - 4k \Longrightarrow n^2 = k^2 - 2k + 1 \Longrightarrow n = \sqrt{(k-1)^2} \Longrightarrow n = k-1.$ A partir da expressão $(k+1)^2 = 4k + n^2$, de acordo com a Igualdade do quadrado, também, determina-se o valor $n = k-1$. Mas observe que, pela hipótese do Teorema 1,$n < k-1$, ora $k-1 < k-1$? Isto gera um absurdo, pois $k-1$ não é menor do que ele mesmo. Logo $n < k-1$, nas condições do Teorema 1, é um absurdo para k número primo. Portanto, se $n < k-1 \in N$, satisfazendo as condições do Teorema 1, k não é primo.

Tendo em vista a necessidade de provar o Teorema 1, de acordo com as condições estabelecidas sobre o valor de "n" para os números compostos, fomos conduzidos a escolher o método indireto para realizar a demonstração. Em outras palavras, se fossem cumpridas as condições afirmadas no Teorema 1, necessariamente, o número k seria composto.

Observe que toda a demonstração do teste é realizada, tendo como foco a variável "n". O modo pelo qual, a expressão algébrica do teste foi elaborada, garantiu afirmar (após a representação de k como a área de um retângulo) se o seu semiperímetro é ou não $k+1$, e, assim, afirmar se k seria primo ou não. Ora, k sendo número primo, necessariamente, vale apenas $k+1$como medida de seu semiperímetro ($2x + n = k + 1$), e, ainda mais, para obter o valor de $k+1$ para o semiperímetro desta representação de k como a área de um retângulo n deve ser igual a $k-1$. A partir da representação geral de k que é $k = x \cdot (x+n)$ e da informação que k é primo, ou seja, obtido apenas como $k = 1 \cdot k$ para manter-se a primalidade de k, atribuímos $x = 1$ e $x + n = k$, consequentemente, $n = k-1$.[16]

Pelo Teorema 1, n não pode assumir $k-1$; quer dizer, os demais valores de "n" só se verificam para números compostos, visto que o único valor para os números primos foi retirado da hipótese do Teorema 1 (ao escrevê-lo como $n < k-1$) e os números

[16] Ver comparação entre as Figuras 4 e 6 (b).

compostos possuem outras representações além daquela em que $k = k \cdot 1$, surgindo outros valores para o semiperímetro.

Em síntese, na demonstração, usou-se a Igualdade do quadrado para reafirmar que o único valor de "n" para k, sendo primo é $k - 1$. Os demais valores para "n" aplicam-se apenas para números compostos.

Recíproca do Teorema 1: se k não é um número primo, então, $n < k - 1$.

Note que, a hipótese da recíproca do Teorema 1, assere que k não é primo, daí ao aplicar a proposição 3: *se um número não é primo ele possui um semiperímetro menor que* $k + 1$, entendida como a única proposição que trata dos números compostos, evidenciou-se que "n" deve ser menor que $k - 1$, para k número composto. Desse modo, tem-se o seguinte raciocínio: como k não é primo, pela proposição 3, ele possui uma representação e um semiperímetro "$2x + n$" menor "$k + 1$", algebricamente, $2x + n < k + 1$. A partir da quinta ideia chave, sabe-se que $2x + n = \sqrt{4k + n^2}$ e, além disso, substituindo $2x + n$ por $\sqrt{4k + n^2}$ na desigualdade[17] $2x + n < k + 1$, resulta: $\sqrt{4k + n^2} < k + 1$. Realizando operações com a finalidade de isolar "n"[18], então: $n^2 < (k + 1)^2 - 4k \Rightarrow n^2 < k^2 + 2k + 1 - 4k \Rightarrow n^2 < k^2 - 2k + 1 \Rightarrow n^2 < (k - 1)^2 \Rightarrow n < k - 1$.

Desta forma, provou-se que se k não é um número primo, então, $n < k - 1$. De modo geral, substituir $2x + n$ por $\sqrt{4k + n^2}$ delineou as operações que deveriam ser realizadas para manter a desigualdade $2x + n < k + 1$; aqui, "n" deve ser menor que a $k - 1$.

5. CONCLUSÃO

O artigo desvelou vestígios do processo heurístico na elaboração do crivo, envolvidos em três atos, a dizer, na origem do pensamento inventivo, na sistematização e na aplicação do raciocínio articulador presente na demonstração do teste de não primalidade. Destaca-se que estes três atos podem comparecer em diferentes modos no movimento de produzir matemática. Além de apresentar o teste como um resultado

[17] Substituiu-se $2x + n$ por $\sqrt{4k + n^2}$, pois se fosse encontrar o valor de n, isolando-o a partir da desigualdade $2x + n < k + 1$, encontraria $n < k + 1 - 2x$. Note que, nessa desigualdade, não há como afirmar, diretamente, que $n < k - 1$, daí a necessidade de realizar a substituição.

18 k é primo, assim de acordo com a proposição 1: $k = 1 \cdot k \Rightarrow k = 1(1 + (k - 1)) \Rightarrow x = 1$ e $n = k - 1$.

matemático, compreendeu-se que uma das tarefas de quem lida com a Matemática é elaborar proposições e demonstrá-las com argumentos lógicos dedutivos. Para dar conta desta tarefa, as ideias que surgiram em torno do crivo foram cotejadas com linguagem geométrica (visual) e com linguagem algébrica e configuraram-se em termos de definições e de proposições e, por fim, demonstrou-se o teste com a finalidade de garantir a veracidade do que fora proposicionado.

Nesse sentido, entende-se que na Matemática o ato de demonstrar é essencial, tendo em vista que garante a verdade e solidez da proposição e, ainda, permite a possibilidade de deduzir novos resultados. Isto pode ser compreendido ao se realizar uma retrospectiva histórica matemática e, assim, analisar as produções matemáticas dos antigos gregos (Euclides, 2009). Com efeito, a Geometria Euclidiana passou por um movimento de ultrapassar as afirmações empíricas, herdadas de egípcios e de babilônios, mediante abstrações que foram designadas como proposições e demonstradas racionalmente, surgindo assim a Matemática dedutiva (Bicudo, 1998).

Em síntese, os fundamentos da Matemática, o pensamento inventivo, o processo de sistematização e o raciocínio articulador anunciam um modo de produzir ciência. Estes, em conjunto, são partes da Educação Matemática e devem ser dialogados, uma vez que para aprender, efetivamente, uma ciência deve-se entender a sua epistemologia.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. de. **Teoria Elementar dos Números**. São Paulo: Nobel, 1981.

ALES BELLO, A. **Fenomenologia e Ciências humanas**. Trad. e Org. Miguel Mahfoud e Marina Massimi. Bauru: Edusc, 2004.

BICUDO, I. Platão e a Matemática. **Revista Letras Clássicas**, n.2, p.301-315, 1998. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/letrasclassicas/article/view/73741/77407. Acesso: 23 mar. 2022.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

COSTA, N. C. A. Da. **Introdução aos Fundamentos da Matemática**. 4. ed, São Paulo: Hucitec, 2008.

COURANT R.; ROBBINS H. **O que é Matemática?** Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Trad. Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2000.

EUCLIDES. **Os elementos/Euclides**. Trad. e intro. Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

HUSSERL, E. **A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental**: uma Introdução à Filosofia Fenomenológica. Trad. Diogo Falcão Ferrer. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

FERREIRA, G. Di. Vestígios do surgimento dos números primos e um teste de não primalidade. Orientador: Jamur Andre Venturin: 2018. 76 f. TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Araguaína, 2018.

GONÇALVES, C. H. G. **Usos da história da matemática no Ensino Fundamental de 5ª a 8ª**. Brasília: SBHMat, 2005.

LYOTARD, J-F. **A Fenomenologia**. Lisboa: edições 70, 1986.

KELLER, V; BASTOS, C. L. **Aprendendo Lógica**. 9. ed. revista. Petrópolis: Vozes, 2001.

PLUMPTON, C.; SHIPTON, E.; PERRY, R. L. **Proof**. London: Macmillan Education Limited, 1984.

RIBEIRO, B. C. D. **Implementação Eficiente de Algoritmos para Teste de Primalidade**. 2013. 75 f. Monografia (Especialização) - Curso de Bacharelado em Ciência da Computação, Universidade de Brasília, Brasília, 2013. Disponível em: https://bdm.unb.br/bitstream/10483/7717/1/2013_BrunoCesarDiasRibeiro.pdf. Acesso em: 25 out. 2021.

SANTOS, J. C. de S. O. A Hipótese de Riemann -150 Anos. ***Gazeta de Matemática***, n. 158. p. 8-14, 2009. Disponível em: https://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/PDF/artigos/Riemann_150.pdf. Acesso em: 23 mar. 2022.

TAXONOMIA CREDIT

Gabriel Di Angelo Ferreira: Conceituação, Investigação, Metodologia, Administração do projeto, Disponibilização de ferramentas, Desenvolvimento, implementação e teste de software, Design da apresentação de dados, Redação do manuscrito original, Redação - revisão e edição.

Jamur Andre Venturin: Curadoria de dados, Análise Formal, Metodologia, Administração do projeto, Disponibilização de ferramentas, Desenvolvimento, implementação e teste de software, Supervisão, Validação de dados e experimentos, Design da apresentação de dados, Redaçãodo manuscrito original.

Duelci Aparrecido de Freitas Vaz: Análise Formal, Metodologia, Administração do projeto, Supervisão, Redaçãodo manuscrito original.